

## Insiemi

### SOTTOINSIEMI, UNIONE, INTERSEZIONE, COMPLEMENTARE

Nota: si suppone  $0 \in \mathbb{N}$ .

01. Determinare tutti i sottoinsiemi di  $A = \{2, 3, 5\}$  e di  $B = \{\{1, 2\}, 3\}$ .
02. Determinare tre sottoinsiemi  $A, B, C$  di  $\mathbb{N}$  tali che:  
 $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $B \cap C \neq \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$ , ma  $A \cap B \cap C = \emptyset$ .
03. Dimostrare che  
 a.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$     b.  $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$ .
04. Svolgere l'esercizio 03. scambiando  $\cap$  con  $\cup$ .
05. Siano  $A, B, C$  sottoinsiemi di  $X$ . È vero che se  $A \cap B \subset A \cap C$  allora  $B \subset C$ ? Se è vero provarlo, altrimenti mostrare un caso in cui è falso.
06. Determinare 4 sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$  a tre a tre disgiunti, ma a due a due non disgiunti.
07. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}$  sono anche sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$ .  
 $A = \{x \in \mathbb{Z} : x + 1 \in \mathbb{N}\}$      $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\}$      $C = \{x \in \mathbb{Z} : x > 5 \text{ oppure } x < 8\}$
08. Descrivere nel modo più semplice  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $X - B$  nei casi seguenti:
  - a.  $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 8\}$      $B = \{n \in \mathbb{N} : n + 1 > 5\}$      $X = \mathbb{N}$
  - b.  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ pari}\}$      $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ multiplo di } 3\}$      $X = \mathbb{N}$
  - c.  $A = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 > 7\}$      $B = \{n \in \mathbb{Z} : |n - 2| < 2\}$      $X = \mathbb{Z}$
  - d.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = -y\}$      $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \in \mathbb{N} \text{ oppure } y \in \mathbb{N}\}$      $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
  - e.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{se } y \geq 0, \text{ allora } x = 1\}$      $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \cdot y \geq 0\}$      $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

### APPLICAZIONI

21. Dire quali fra le seguenti corrispondenze sono applicazioni:
  - a.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$      $\varphi(n) = 3n^2 + 1$
  - b.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$      $\varphi(n) = (n + 1)/(n + 2)$
  - c.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$      $\varphi(a) = \text{soluzione dell'equazione } x^2 + ax = 5$
  - d.  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$      $\varphi(p/q) = p + q$
  - e.  $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$      $\varphi((n, m)) = n + m$
  - f.  $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$      $\varphi((n, n)) = n^2 + n - 1$
  - g.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$      $\varphi(n) = (n^2 + n + 1, n)$
  - h.  $\varphi : \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$      $\varphi(x) = (x + 1)/x^2$
  - i.  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$      $\varphi(x) = (x + 1)/(x + 2)$
  - l.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$      $\varphi(a) = \text{soluzione positiva dell'equazione } 3x^2 = a$
  - m.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$      $\varphi(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è un quadrato} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
  - n.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$      $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{altrimenti} \end{cases}$
22. Elencare tutte le possibili applicazioni:
  - a. Da  $\{1, 2, 3\}$  in  $\{0, 5\}$
  - b. Da  $\{1, 2\}$  in  $\{\{1, 2\}, 3\}$
  - c. Da  $\mathbb{N}$  in  $\{1\}$
  - d. Da  $\{1\}$  in  $\mathbb{N}$
  - e. Da  $\{1, 2\}$  in  $\mathbb{Z}$
  - f. Da  $\mathbb{Z}$  in  $\{1, 2\}$
23. Dire se sono iniettive e/o surgettive le seguenti applicazioni:
  - a.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$      $\varphi(n) = 3n$
  - b.  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$      $\varphi((n, m)) = n + m$

- c.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$        $\varphi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ pari} \\ n-1 & \text{se dispari} \end{cases}$
- d.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$        $\varphi(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ (-1-n)/2 & \text{se dispari} \end{cases}$
- e.  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$        $\varphi(n) = \sqrt{n^2}$
- f.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$        $\varphi(n) = n/(6+n)$
24. Sia  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  definita come  $\varphi(n) = n/2$ . Determinare  $\varphi(2\mathbb{N})$ ,  $\varphi(2\mathbb{N}+1)$ ,  $\varphi^{-1}(1/2)$ ,  $\varphi^{-1}(2)$ ,  $\varphi^{-1}(-1)$ ,  $\varphi^{-1}(\mathbb{Z})$
25. Sia  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita come:  $\varphi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ è un numero primo} \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$   
determinare  $\varphi(2\mathbb{N})$ ,  $\varphi^{-1}(1)$ ,  $\varphi^{-1}(6)$ ,  $\varphi^{-1}(7)$ ,  $\varphi^{-1}(2\mathbb{Z})$
26. Sia  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definita come  $\varphi(n) = [\text{resto della divisione di } n \text{ per } 3]$ . Determinare  $\varphi^{-1}(0)$ ,  $\varphi^{-1}(1)$ ,  $\varphi^{-1}(4)$ ,  $\varphi^{-1}(\{0, 1, 2\})$ ,  $\varphi^{-1}(\{0, 5\})$ ,  $\varphi(\mathbb{N})$ ,  $\varphi(2\mathbb{N})$
27. Sia  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come:  
$$\varphi((a, b, c)) = \begin{cases} \text{minore delle soluzioni dell'equazione } ax^2 + bx + c = 0, \text{ se } b^2 \geq 4ac \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
- a. Dire perché  $\varphi$  non è applicazione.  
b. Determinare un sottoinsieme  $X \subset \mathbb{R}^3$  tale che  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sia applicazione.  
c. Determinare, per questa applicazione,  $\varphi^{-1}(0)$  e  $\varphi^{-1}(1)$ .
28. Sia  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  l'applicazione definita come  $\varphi(n) = (n^2, 3n-2)$ . Determinare  $\varphi^{-1}(\Delta)$  dove  $\Delta = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m = n\}$
29. Costruire un'applicazione  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  tale che  $\varphi^{-1}(0) = 2\mathbb{N}$  e  $\varphi(3) = 1$ .
30. Costruire un'applicazione  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $\varphi^{-1}(1)$  abbia un elemento,  $\varphi^{-1}(2)$  ne abbia due e in generale  $\varphi^{-1}(n)$  abbia  $n$  elementi.
31. Definire un'applicazione  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi(2\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}$ ,  $\varphi(2\mathbb{N}+1) \not\subset \mathbb{Q}$ .
32. Definire un'applicazione iniettiva  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi(n) > 100$  se  $n < 100$  e  $\varphi(n) < 100$  se  $n > 100$ .
33. Definire un'applicazione bigettiva  $\varphi : \{2\mathbb{N}+1\} \rightarrow \mathbb{N}$ .
34. a. Definire un'applicazione bigettiva  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ .  
b. Definire un'applicazione surgettiva e non iniettiva  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ .  
c. Definire un'applicazione non surgettiva, ma iniettiva  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ .
35. Descrivere  $\psi \circ \varphi$  per le seguenti coppie di applicazioni:
- a.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$        $\varphi(n) = (n+2)(n+1)/2$   
 $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$        $\psi(n) = 1-n$
- b.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$        $\varphi(x) = [x]$  (parte intera)  
 $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$        $\psi(n) = |n-2|$
- c.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$        $\varphi(x) = x/(x+1)$   
 $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$        $\psi(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- d. come c., determinare però  $\varphi \circ \psi$
- e.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$        $\varphi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$   
Descrivere  $\varphi \circ \varphi$ ,  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ .
36. Provare che sono invertibili le seguenti applicazioni e descriverne l'inversa:
- a.  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$        $\varphi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ pari} \\ n-1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$
- b.  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$        $\varphi(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \text{ pari} \\ x-1 & \text{se } x \text{ dispari} \end{cases}$