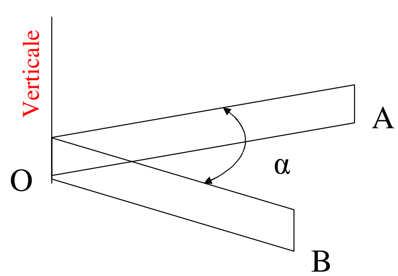
Strumenti e metodi di misura topografici

Teodolite

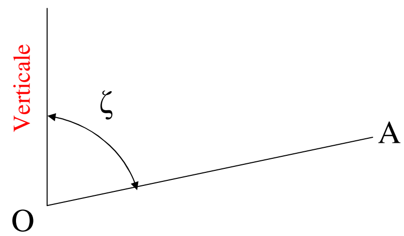
Definizione operativa di angolo azimutale e angolo zenitale:
dati tre punti O, A e B della superficie terrestre; l'angolo azimutale fra A e B misurato in O è l'angolo formato tra il piano contenente la verticale in O e il punto A, ed il piano contente la verticale in O ed il punto B.



Questo angolo coincide, a meno di "correzioni trascurabili", con l'angolo compreso tra le sezioni normali O_0A_0 e O_0B_0.

L'angolo zenitale OA, o *distanza zenitale,* è l'angolo che la direzione OA forma con la verticale in O; il suo complemento è l'*angolo di altezza.*

Il teodolite è lo strumento che principalmente misura angoli azimutali e zenitali; tuttavia esso è in grado, con determinati accessori, di misurare anche distanze, azimut magnetici, azimut geografici.



Struttura del teodolite

Si identificano tre parti principali:

•una base (b) solidale al terreno attraverso un treppiede o pilastro, munita di tre *viti calanti* usate per l'orientamento dell'asse primario a_1

•intorno all'asse verticale ruota l'*alidada* (corpo a forma di U), l'asse solidale all'alidada e perpendicolare ad a_1 è chiamato asse secondario (a_2)

•intorno all'asse secondario ruota un canocchiale nel quale è definito un terzo asse a_3, chiamato asse di collimazione

Condizione di rettifica dello strumento

asse secondario normale a_2 all'asse primario a_1, e l'asse di collimazione a_3 è normale all'asse a_2.

Lo strumento è posto in stazione agendo sulle viti calanti:

l'asse primario diviene verticale → asse secondario viene orizzontale

in queste condizioni l'asse di collimazione, ruotando intorno ad a_2, descrive un **piano verticale**

I tre assi a_1 a_2 e a_3 si incontrano in un punto *C* detto centro dello strumento.

Per la misura degli angoli azimutali la conoscenza di *C* non è necessaria, a condizione che il punto si trovi sull'asse a_1.

Per la misura di distanze zenitali è necessario conoscere *C* (tali misure sono riferite a tale punto); in particolare si deve conoscere l'altezza del punto *C* dal punto di stazione sul terreno.

Le letture degli angoli sono effettuate su cerchi graduati:

misure azimutali → cerchio normale all'asse a_1

misure distanze zenitali → cerchio normale all'asse a_2

Indici di lettura:

L’indice di lettura al cerchio orizzontale è in generale solidale con l’alidada.

Il cerchio verticale è in generale fisso all’asse secondario e ruota insieme al canocchiale, l’indice di lettura al cerchio verticale è in generale fissato con l’alidada

Graduazioni dei cerchi sono quasi sempre in senso orario e con unità di misura centesimale o sessagesimale, sessadecimale.

Negli strumenti moderni l’unità di misura è impostata dall’utente.
La lettura ai cerchi avviene in modo automatico mediante dispositivi elettro-ottici.

Osservazioni:

1. a tutti i punti situati sul piano verticale C descritto dall’asse di collimazione corrisponde la stessa posizione sull’alidada → stessa lettura sul cerchio orizzontale

2. dirigendo l’asse di collimazione prima verso un punto A e poi verso un punto B ed eseguendo le corrispondenti letture al cerchio orizzontale L_A e L_B, la differenza L_B- L_A è uguale all’angolo *azimutale ACB misurato in senso orario da A verso B*

3. sul cerchio verticale si leggono le rotazioni dell’asse di collimazione. Se conosco la lettura Z quando l’asse di collimazione è verticale, allora collimando un punto A (appartenente al piano verticale) eseguo la lettura S al cerchio verticale → la rotazione è S-Z

Lo schema geometrico del teodolite illustrato riguarda uno strumento ideale!

si pone il problema pratico di come realizzare le specifiche ottiche, meccaniche e geometriche descritte sopra:

1. costruzione del cannocchiale e la realizzazione dell'asse di collimazione

2. i cerchi graduati ed i metodi di lettura su di essi

3. le operazioni necessarie per rendere verticale l'asse primario

4. la messa in stazione → asse primario coincidente con la verticale

5. metodi di rettifica → come si verifica e/o si impongono le condizioni di normalità degli assi a_2 ,a_1 e a_3 ,a_3

La misura di angoli e direzioni ha una precisione che dipende sia dallo strumento che dall'ambiente in cui si opera (segnali di collimazione..)

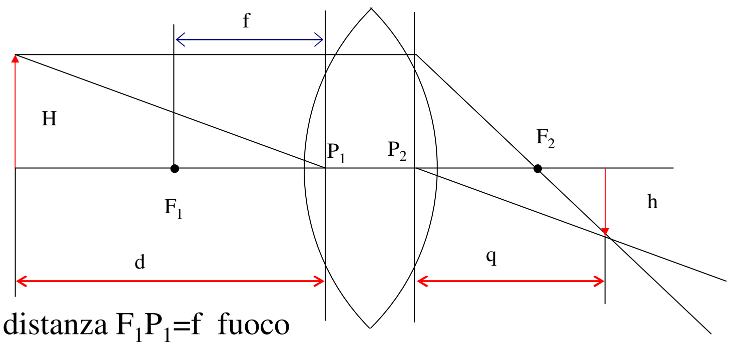
In linea di massima la precisione strumentale varia entro limiti ampi l'sqm intrinseco di una misura di angolo varia da $3\ 10^{-5}$ g.c. (0.1") a $2\ 10^{-2}$ g.c. (1').

L'sqm sul terreno è uguale a quello strumentale se si usa uno strumento di modesta precisione e si collimano punti a breve distanza.
Mentre non scende al di sotto di $1\text{-}1{,}5\ 10^{-4}$g.c. (0,3"-0,5") per gli angoli azimutali.
Per le distanze zenitali la massima precisione ottenibile è ancora inferiore.

Spesso si caratterizza il teodolite associando lo sqm strumentale
es teodolite da 1", teodolite da 30" … teodolite da 1'

Cannocchiale astronomico schema

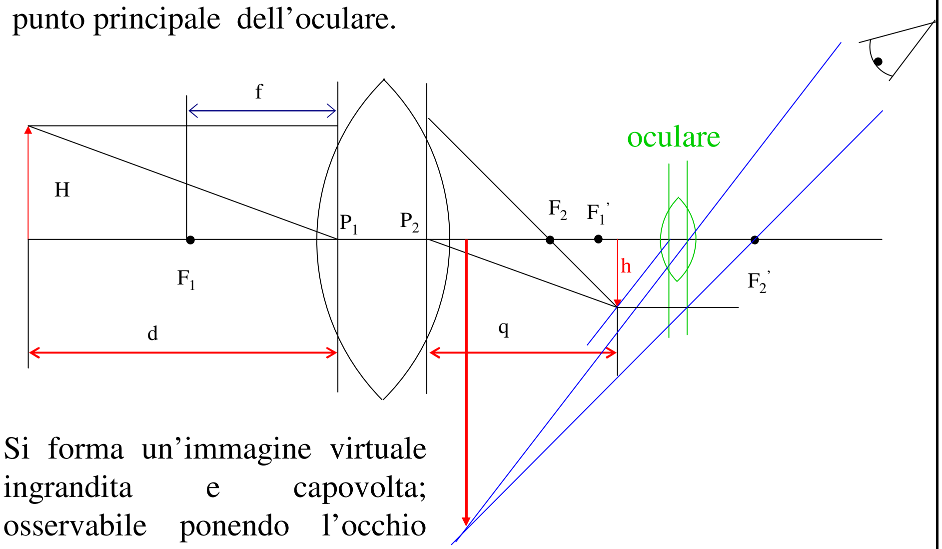
Lente obbiettivo



distanza F_1P_1=f fuoco

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad \frac{h}{H}=\frac{q}{d}$$

L'immagine è fatta cadere tra il fuoco e il primo punto principale dell'oculare.



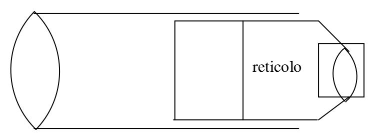
Si forma un'immagine virtuale ingrandita e capovolta; osservabile ponendo l'occhio dietro all'oculare

Il reticolo va posto nello stesso piano in cui si forma l'immagine reale data dall'obbiettivo.

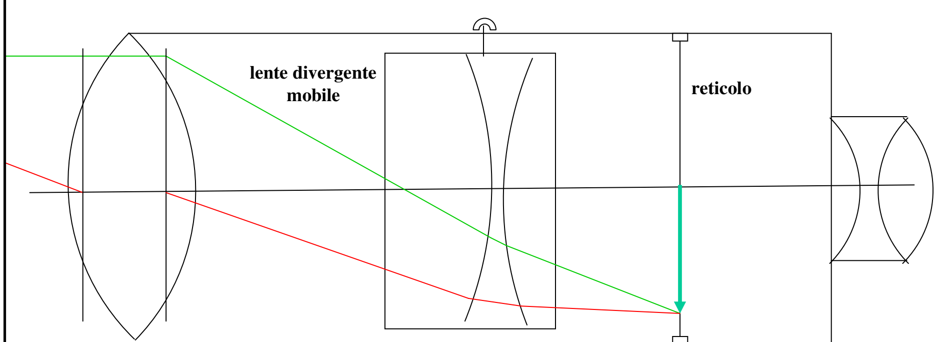
L'asse di collimazione è la congiungente tra il centro del reticolo e il secondo pp dell'obbiettivo

Per collimare punti a distanze diverse è necessario poter variare la distanza tra reticolo e obbiettivo.

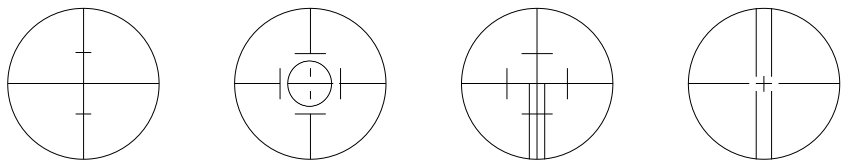
1) soluzione reticolo fisso e obbiettivo variabile
2) soluzione reticolo ed oculare variabili ed obbiettivo fisso

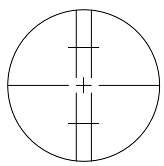


Cannocchiale a lunghezza costante



Vantaggi:
1) a parità di lunghezza ha maggiori ingrandimenti
2) l'asse di collimazione varia meno
3) è stagno alla polvere ed all'umidità



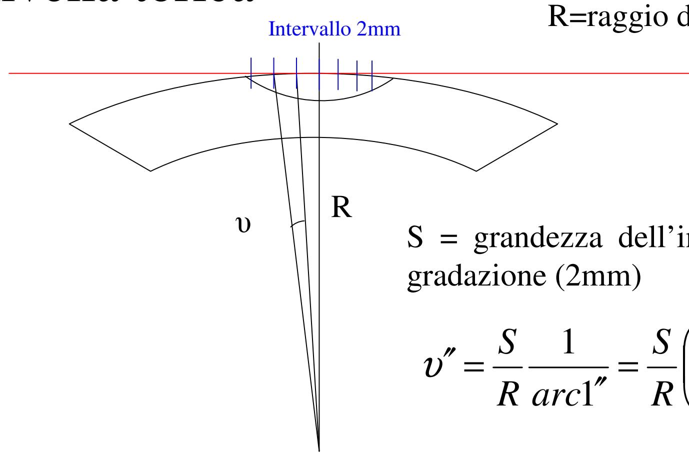


I reticolo e l'oculare devono essere ad una distanza in modo da vedere il reticolo **ben nitido!**

Operativamente si colloca prima della misura un foglio bianco davanti al cannocchiale e si agisce sull'oculare mettendo a fuoco il reticolo.

Messa in stazione del teodolite livella torica

R=raggio del toro



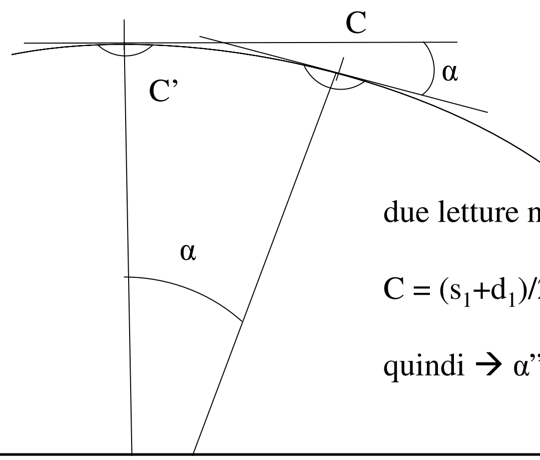
S = grandezza dell'intervallo della gradazione (2mm)

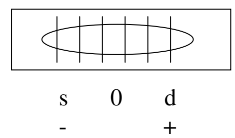
$$\upsilon'' = \frac{S}{R}\frac{1}{arc1''} = \frac{S}{R}\left(\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}\right)$$

Sensibilità = angolo di cui ruota per spostare la bolla di 1 mm

Ad esempio 30”/2mm ovvero la gradazione è due millimetri la sensibilità è 15” a cui corrisponde un raggio di: 1mm/(15” arc 1”)=13.8 metri. All’aumentare di R aumenta la sensibilità della livella.

Intervallo dei valori di sensibilità da 1’ a pochi secondi



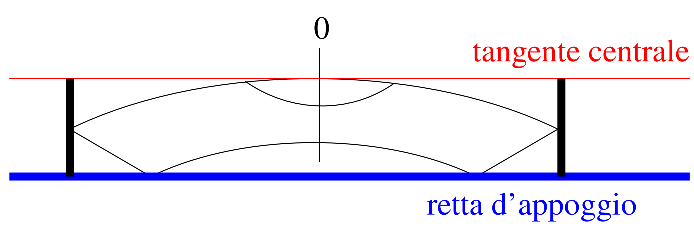


due letture nelle posizioni C e C’

$C = (s_1+d_1)/2 \quad C' = (s_2+d_2)/2$

quindi → $\alpha'' = \upsilon''(C'-C)$

La livella è *rettificata* quando la tangente centrale e’ parallela alla retta d’appoggio.

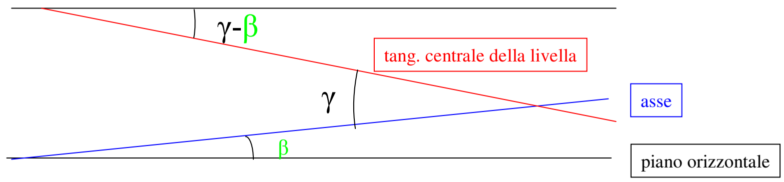


Quindi per rendere orizzontale un asse basta appoggiare la livella e ruotare l’asse finché la bolla si centra.

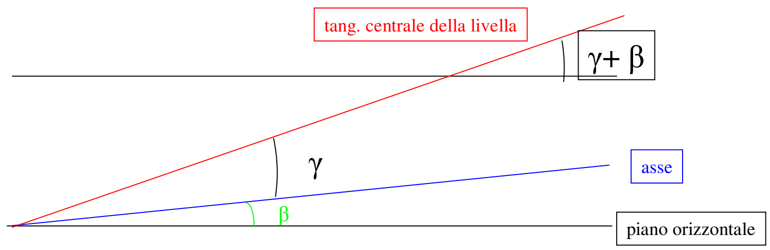
Come possiamo controllare che la livella sia rettificata?

Supponiamo che la livella non sia rettificata e la tangente centrale formi un angolo γ con l'asse su cui è appoggiata.

sia β = angolo tra piano orizzontale e asse



inverto la livella sugli appoggi …



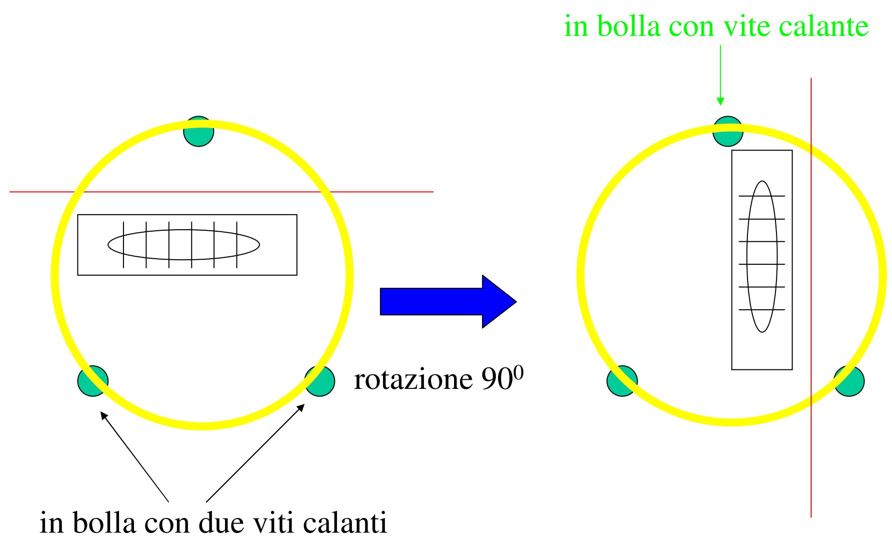
Quindi effettuando due misurazioni C e C' nelle posizioni indicate otteniamo:

$C\upsilon'' = \gamma'' - \beta''$ e $C'\upsilon'' = \gamma'' + \beta''$ elimino γ e ricavo $2 * \beta'' = (C' - C) * \upsilon''$

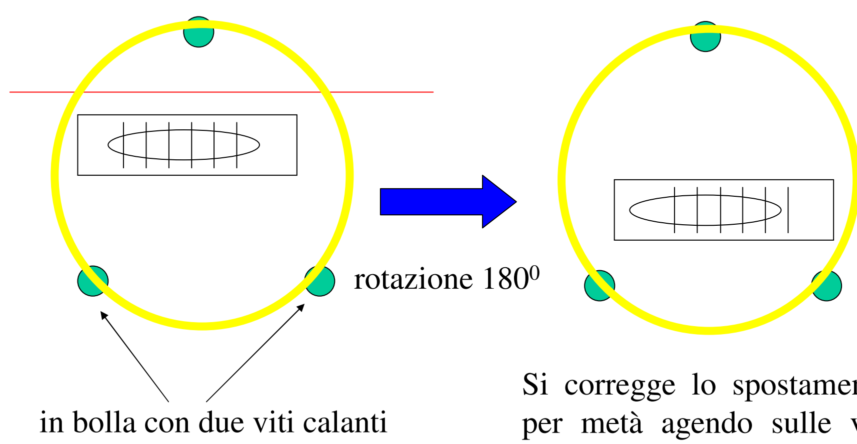
Ovvero lo spostamento della bolla di una livella rettificata o meno, appoggiata su un asse ed invertita, è proporzionale al doppio dell'angolo che l'asse forma con l'orizzontale.

Dalle relazioni si ricava l'angolo $\gamma'' = (C' + C) * \upsilon''/2$

Mediante una livella torica ***rettificata*** solidale con l'alidada si rende l'asse principale coincidente con la verticale → strumento in stazione.
Condizione di rettifica: tangente centrale normale all'asse principale



Se la bolla non è ***rettificata***?



Si corregge lo spostamento per metà agendo sulle viti calanti e per l'altra metà sulle vite di rettifica della livella

Tre sorgenti d'errore legate alle condizioni di non perfetta normalità degli assi del teodolite.

I tre assi a_1 a_2 a_3 non possono essere realizzati in maniera tale da soddisfare le condizioni geometriche descritte.

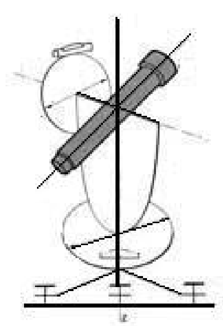
ν = errore di verticalità, ovvero angolo che l'asse a_1 forma con la verticale nel punto stazione; va inteso come errore residuo, cioè dopo aver orientato l'asse con l'aiuto della livella

i = errore di inclinazione, ovvero angolo che l'asse a_2 forma con la normale all'asse a_1

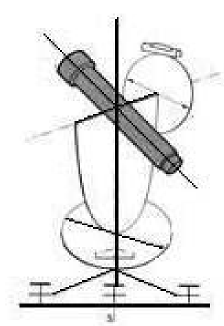
c = errore di collimazione, ovvero angolo che l'asse a_3 forma con il piano normale all'asse a_2

Come i tre errori influenzano le letture ai cerchi orizzontale e verticale?

Osservazione:
La collimazione di un punto P può essere eseguita in due posizioni diverse dello strumento.



Cerchio zenitale a sinistra CS



Cerchio zenitale a destra CD

Approssimazione: trascuriamo gli effetti congiunti dei tre errori sulle letture → illustriamo i casi in cui gli errori compaiono singolarmente.

L = lettura azimutale quando si collima C con lo strumento perfettamente rettificato

L' = lettura azimutale quando si collima C con lo strumento srettificato

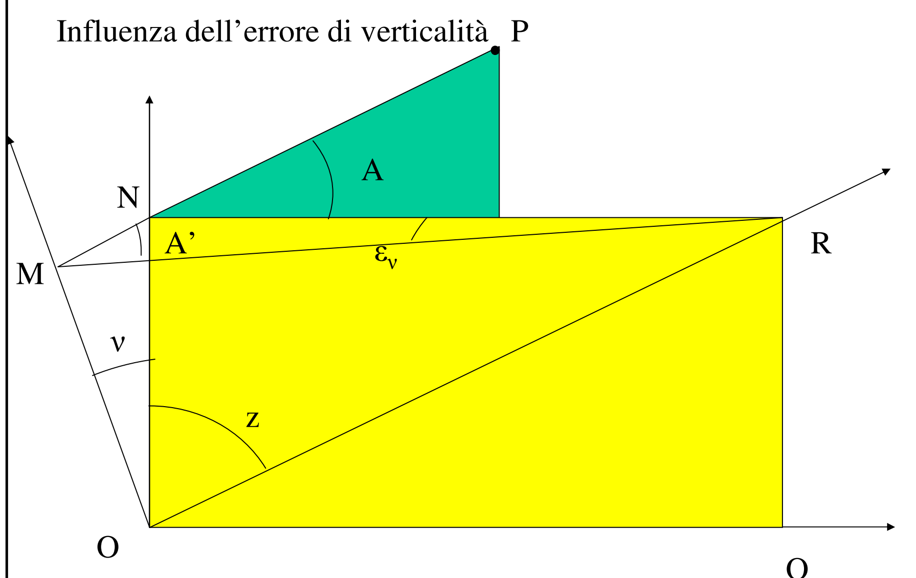
Sviluppando f in serie si ottiene ($f_0=0$)

$$L' - L = f(\nu, i, c, A, z)$$

$$L' - L \cong \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0 \nu + \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)_0 i + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_0 c$$

Nota: trascurare i termini misti nello sviluppo corrisponde a non considerare l'influenza reciproca dei vari errori.

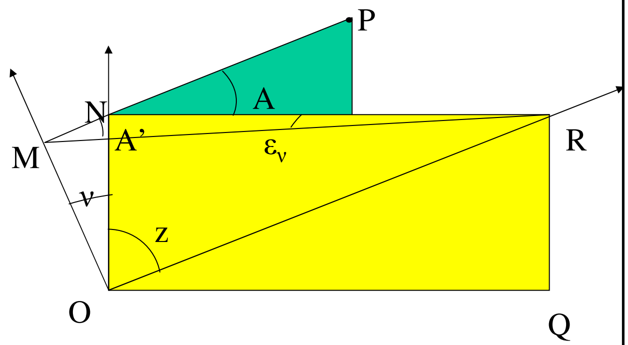
Influenza dell'errore di verticalità



ON=1 → MN=ONν= ν   A=A'+ε_ν applichiamo teorema seni a MNR

ON=1 → MN = ON ν = ν   A=A'+ε_ν

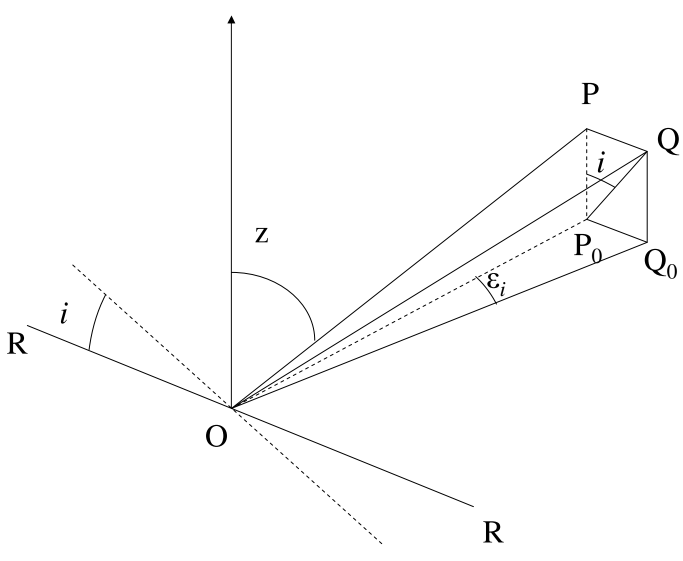
applichiamo teorema seni a MNR



$$\frac{NR}{\sin A'}=\frac{MN}{\sin\varepsilon_\nu}=\frac{\nu}{\sin\varepsilon_\nu}\rightarrow\sin\varepsilon_\nu=\frac{\nu\sin A'}{NR}$$

$$NR=ON\tan z\rightarrow\boxed{\varepsilon_\nu=\frac{\nu\sin A'}{\tan z}\cong\nu\sin A\cot z}$$

Influenza dell'errore di inclinazione *i*

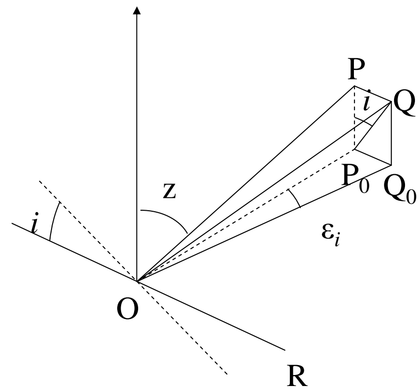


Influenza dell'errore di inclinazione i

$$\frac{P_0Q_0}{OP_0} = \tan\varepsilon_i \cong \varepsilon_i$$

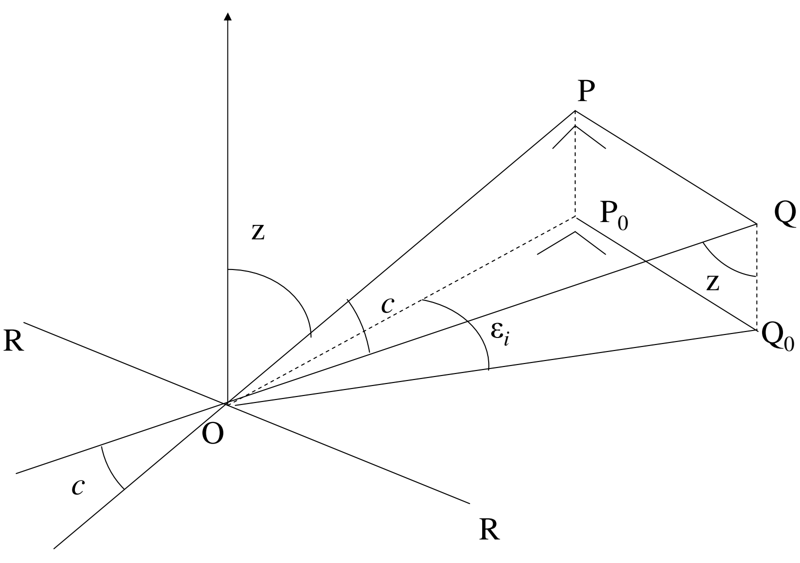
$$P_0Q_0 = PQ = PP_0 \tan i$$

$$OP_0 = PP_0 \tan z$$

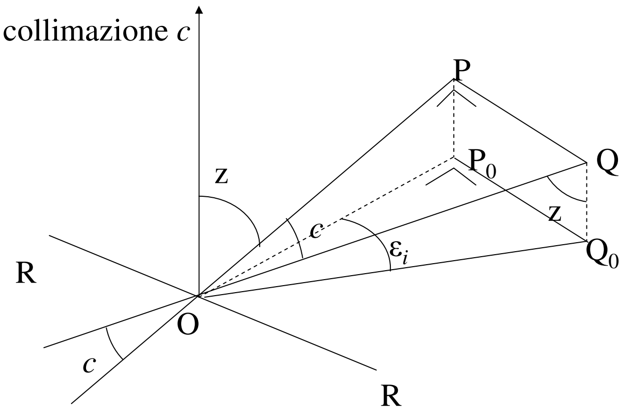


$$\boxed{\varepsilon_i = \frac{PP_0 \tan i}{PP_0 \tan z} \cong i \cot z}$$

Influenza dell'errore di collimazione c



Influenza dell'errore di collimazione *c*



$$\sin\varepsilon_c \cong \varepsilon_c = \frac{P_0Q_0}{OQ_0}$$

$$P_0Q_0 = PQ = OQ\sin c \qquad OQ_0 = OQ\sin z$$

$$\boxed{\varepsilon_c = \frac{c}{\sin z}}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = v\sin A\cot z}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = i\cot z}$$

$$\boxed{\varepsilon_c = \frac{c}{\sin z}}$$

Osservazione:
cosa succede ai tre errori quando, collimando un punto P, e si eseguono due letture una al C.S. e l'altra C.D.?

Gli errori $\varepsilon_i\,\varepsilon_c$ *CAMBIANO di segno!!!*

$$L'-L = \varepsilon_v \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_c =$$

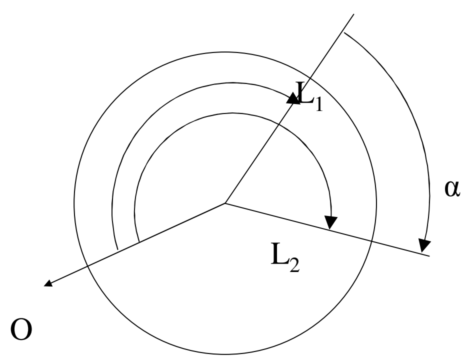
$$= v\sin A\cot z \pm i\cot z \pm \frac{c}{\sin z} =$$

$$= v\sin A\tan\delta \pm i\tan\delta \pm \frac{c}{\cos\delta}$$

L'influenza dell'errore di verticalità non è eliminabile. ε_v in cc

δ / ν	1^g	5^g	20^g	30^g	50^g
5^{cc}	0,08	0,40	1,62	2,55	5.
10^{cc}	0,16	0,79	3,25	5,1	10
50^{cc}	0,78	3,93	16,25	25,2	50
100^{cc}	1,57	7,87	32,49	51,0	100

Con uno strumento perfettamente rettificato → $\alpha=L_2-L_1$

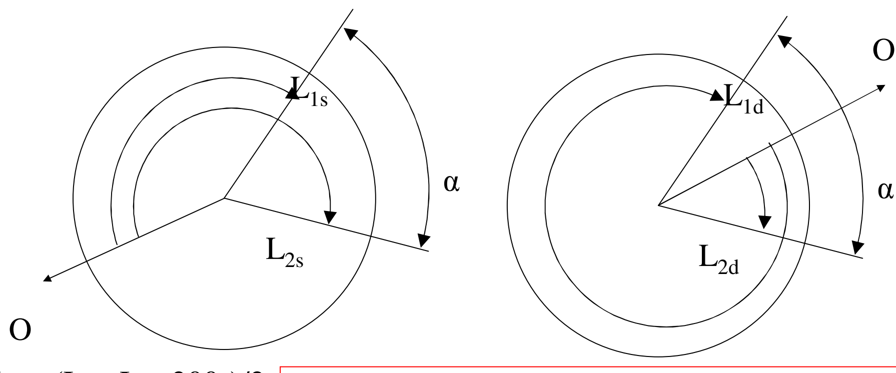


Quando la precisione richiesta è modesta → si trascurano l'influenza degli errori residui.

In pratica si preferisce sempre effettuare per ogni direzione due misure nelle posizioni C.S. C.D.

Due vantaggi:
1) la possibilità di evidenziare errori grossolani (2 misure per ogni direzione!)
2) si eliminano l'influenza degli errori di rettifica dell'asse secondario e di collimazione

Se eseguo due letture nelle posizioni strumentali C.S. e C.D. la media dei valori ottenuti, dopo aver tolto 200^g alla lettura C.D., non è affetta dall'influenza degli errori di rettifica *c* ed *i*.



$L_1 = (L_{1s}+L_{1d}-200^g)/2$

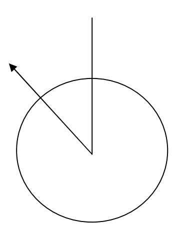
$L_2 = (L_{2s}+L_{2d}-200^g)/2$

Misurando un angolo azimutale nelle due posizioni coniugate dello strumento la misura dei valori ottenuti non è influenzata dalla presenza di errori di collimazione e inclinazione

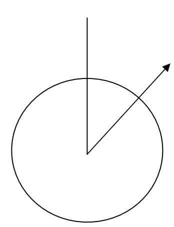
Per l'angolo zenitale si eseguono le letture nelle posizioni coniugate dello strumento (C.S. e C.D.) e si ottiene la misura:

$$z = \frac{S - D}{2}$$

(Attenzione correggere la lettura (D o S) di un angolo giro)



Lettura S in posizione CS



Lettura D in posizione CD

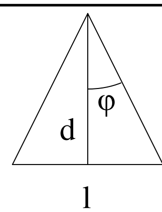
Misura indiretta della distanza

principio: determinazione di un angolo che il vertice in un punto estremo della distanza e sottende un tratto noto o misurato della stadia posta all'altro estremo

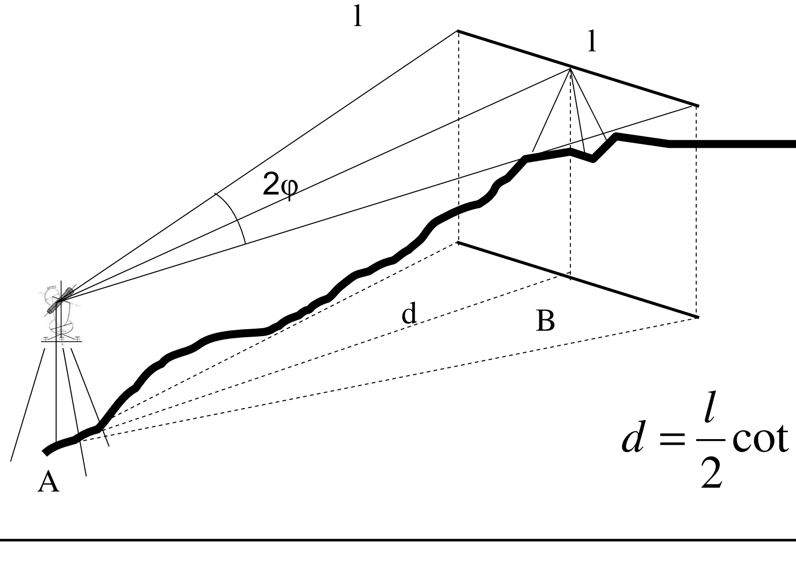
metodi ad angolo parallattico variabile → stadia orizzontale/verticale

metodi ad angolo parallattico costante → stadia verticale

Stadia orizzontale:
(parallattico variabile)



$$\frac{l}{2d} = \tan\varphi \rightarrow d = \frac{l}{2\tan\varphi}$$



$$d = \frac{l}{2}\cot\varphi$$

Angolo parallattico variabile
stadia verticale

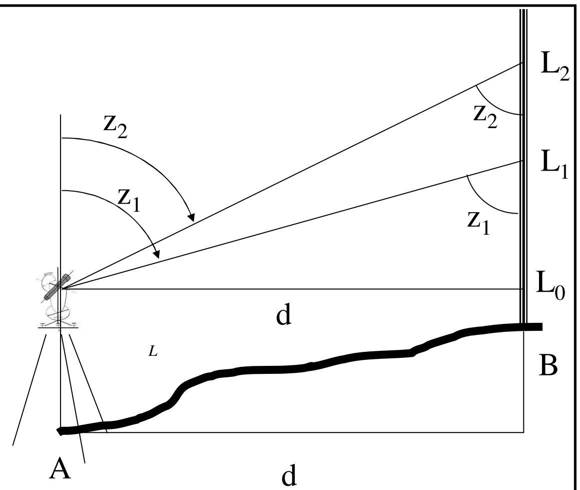
$$L_0L_1 = \frac{d}{\tan z_1}$$

$$L_0L_2 = \frac{d}{\tan z_2}$$

$$L_0L_2 - L_0L_1 = L_2 - L_1 =$$

$$= d\left(\frac{1}{\tan z_2} - \frac{1}{\tan z_1}\right)$$

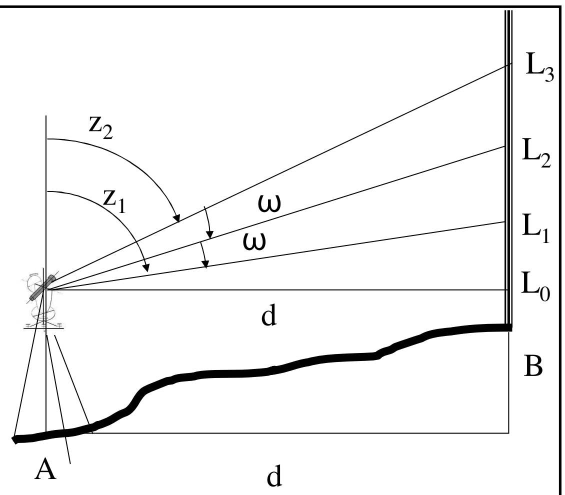
$$\rightarrow d = \frac{L_2 - L_1}{\left(\frac{1}{\tan z_2} - \frac{1}{\tan z_1}\right)} = \frac{(L_2 - L_1)\sin z_1 \sin z_2}{\sin(z_1 - z_2)}$$



Angolo parallattico costante:

si realizza uno strumento che è in grado di fornire tre letture L_1, L_2 e L_3, con angolo ω=costante.
posto $H=L_3 - L_1$

$$d = cH\sin^2 z$$



dove c è una costante strumentale solitamente 100 o 50

$$z_1 = z + \omega \quad z_2 = z - \omega$$

$$d = \frac{(L_3 - L_1)\sin(z+\omega)\sin(z-\omega)}{\sin(z+\omega-(z-\omega))} = \frac{H\sin^2 z}{2\tan\omega} - \frac{H\tan\omega\cos^2 z}{2}$$

se ω è costante → il termine tan ω è una costante strumentale!
1/2tan ω = C.

Scegliendo opportunamente ω C assume valori paria a 50, 100, 200

$$d = HC\sin^2 z - \frac{H\cos^2 z}{4C} = HC\sin^2 z\left(1 - \frac{1}{4C^2\tan^2 z}\right) \cong$$

$$\cong HC\sin^2 z$$

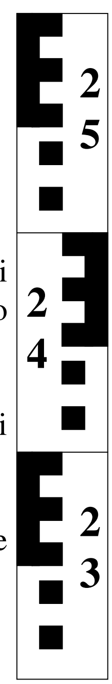
Stadie:

-origine nel punto d’appoggio sul terreno
-tratti disegnati per individuare la metà di ogni decimetro
-le cifre riportate sono i decimetri

→collimando una stadia ad un tratto orizzontale del reticolo si leggono immediatamente: i decimetri, i centimetri e si stimano i millimetri.

in alcuni casi con particolari dispositivi si possono valutare i decimi di millimetro!

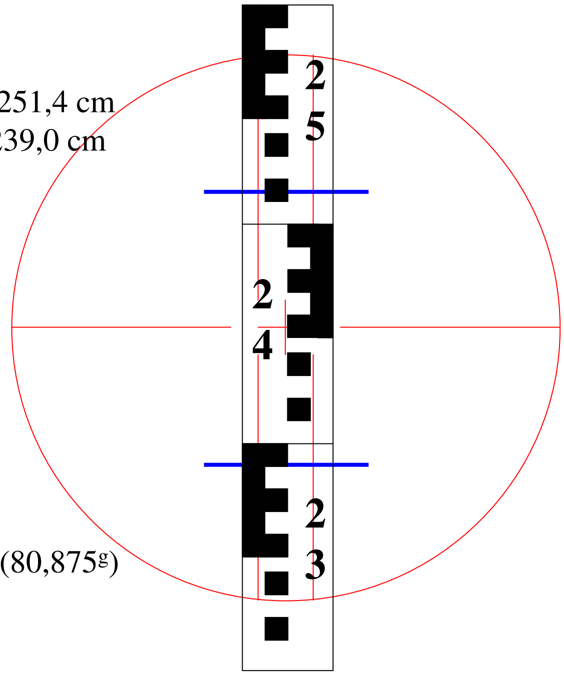
lunghezza tra 3 e 4 metri e dotate di livella sferica per disporle lungo la verticale.



Esempio di lettura:

tratto orizzontale superiore: 251,4 cm
tratto orizzontale inferiore: 239,0 cm

$z = 80{,}875^g$



$D = 100*(251{,}4-239\text{-}0)*\sin^2(80{,}875^g)$
$=1131{,}4$ cm

I due metodi con angolo parallattico variabile (stadia orizzontale e verticale) sono poco impiegati:

il primo per richiede strumenti di altissima precisione poco primi per raggiungere precisioni modeste su distanze di qualche centinaia di metri (a 200m con uno strumento a 1^{cc} 6 cm errore teorico!)

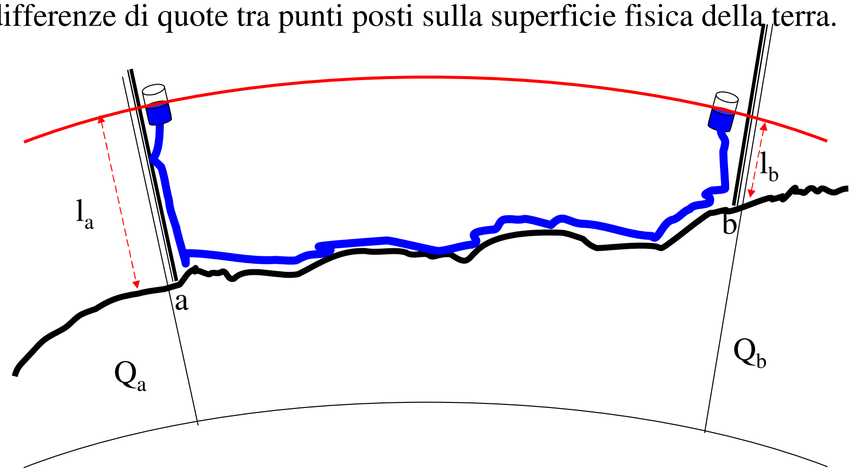
il secondo risente

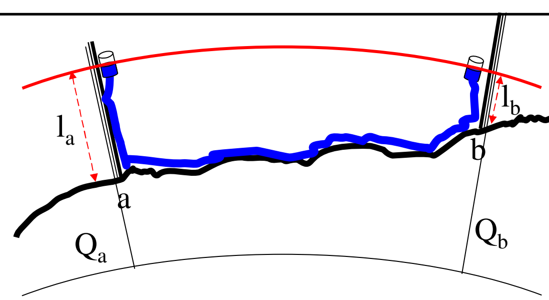
1)dell'inclinazione della stadia
2)puntamento dei tratti

Il metodo con angolo parallattico costante è presente in molti teodoliti e fornisce misure di distanza di bassa precisione (1-20 cm)

Misura diretta dei dislivelli

Definizione: la livellazione è un'operazione che consente di misurare differenze di quote tra punti posti sulla superficie fisica della terra.





$$Q_a + l_a = Q_b + l_b \Rightarrow \boxed{Q_b - Q_a = l_a - l_b}$$

L'operazione che consente questo calcolo è chiamata:
battuta di livellazione.

Lo strumento che permette di eseguire una battuta di livellazione è il livello a cannocchiale.

Campi di impiego della livellazione geometrica:

impieghi:

progettazione di infrastrutture (strade, ferrovie, acquedotti, …)

collaudo e controllo di opere di ingegneria civile (dighe, ponti …)

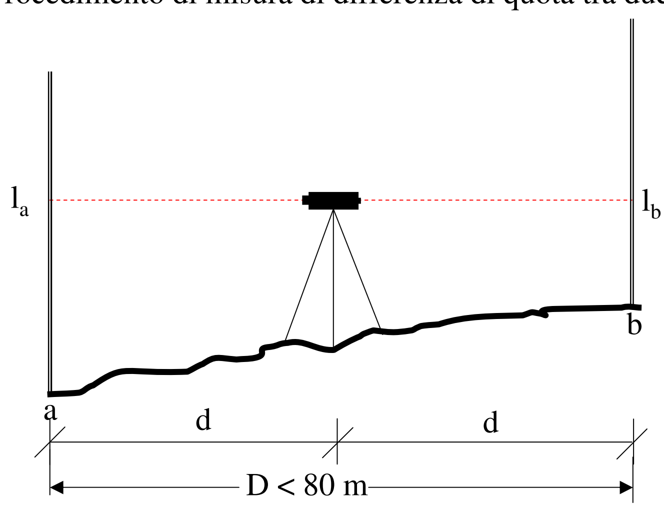
punto/i di una livellazione → caposaldo/i

non è un'operazione per la descrizione dell'altimetria <u>(non misuriamo direttamente la quota di un punto sul terreno!)</u>

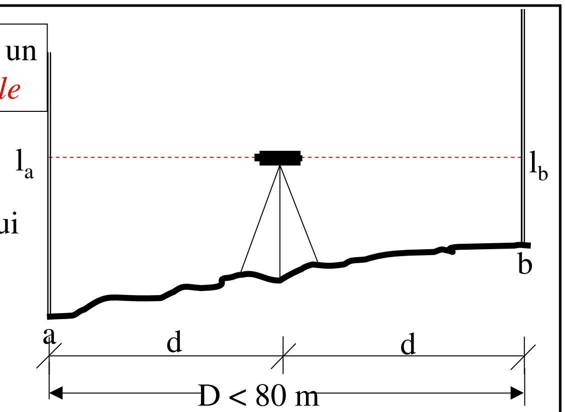
si ottiene la quota se si conosce la quota in uno dei sue punti.

Livellazione geometrica

Procedimento di misura di differenza di quota tra due punti



livello: strumento che realizza un *asse di collimazione orizzontale*



2 stadie poste verticalmente sui caposaldi a e b.

il dislivello è:

$$\boxed{\Delta_{ab} = l_a - l_b}$$

nb $\boxed{\Delta_{ab} = Q_b - Q_a}$

Il dislivello è un segmento orientato

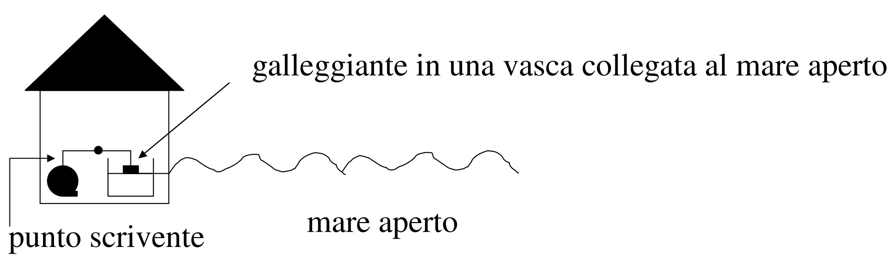
$$\Delta_{ab} = -\Delta_{ba}$$

Caratteristiche della livellazione geometrica:

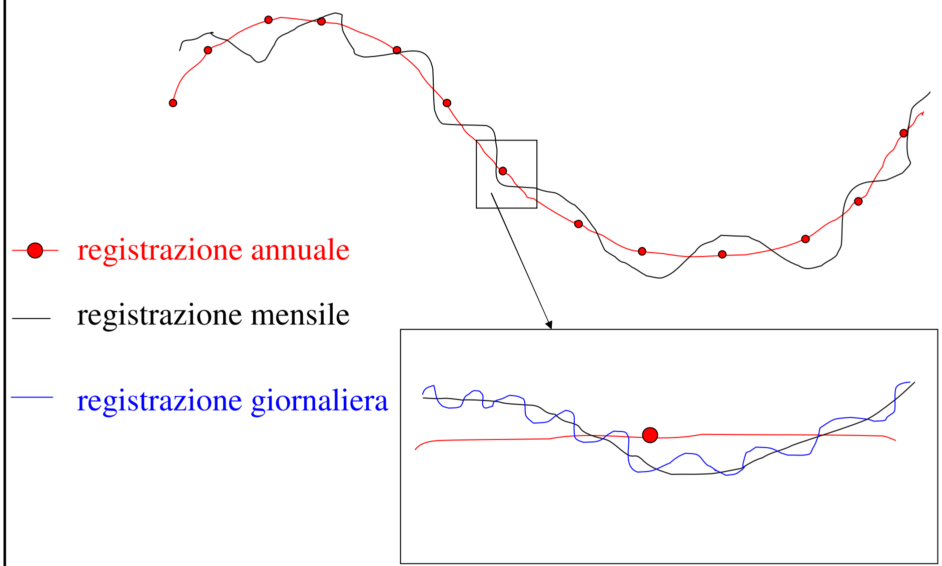
non richiede la conoscenza della distanza

metodo estremamente preciso per la misura di dislivello, <u>σ della singola battuta compreso tra 0,1-1 mm</u>

facendo riferimento al geoide, come superficie di riferimento, le quote ottenute sono QUOTE ORTOMETRICHE. Basta fissare la quota di un punto



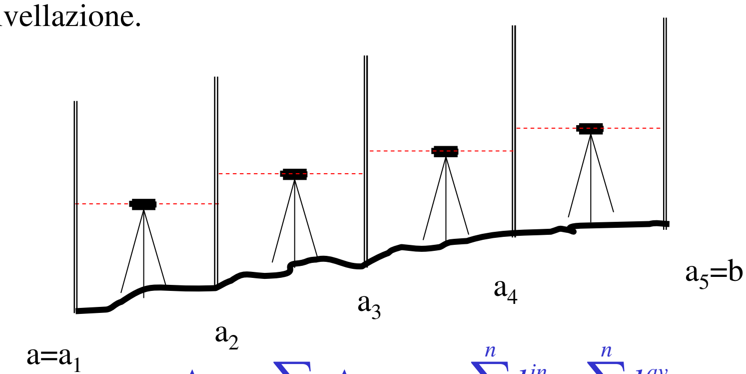
Traccia registrata dal mareografo



La media delle misure su un opportuno arco temporale consente di definire il livello medio del mare rispetto ad un punto fisso e stabile nel tempo.

Si quota così il <u>PUNTO DI EMANAZIONE</u> per le quote → il mareografo fondamentale italiano si trova a GENOVA

Se la distanza D > 70÷80 m vengono effettuate più battute di livellazione.



$$\Delta_{ab} = \sum_j \Delta_{a_j, a_{j+1}} = \sum_{j=1}^{n} l_j^{in} - \sum_{j=1}^{n} l_j^{av}$$

l_j^{in} = *lettura "indietro"*

l_j^{av} = *lettura "avanti"*

n = *numero delle battute*

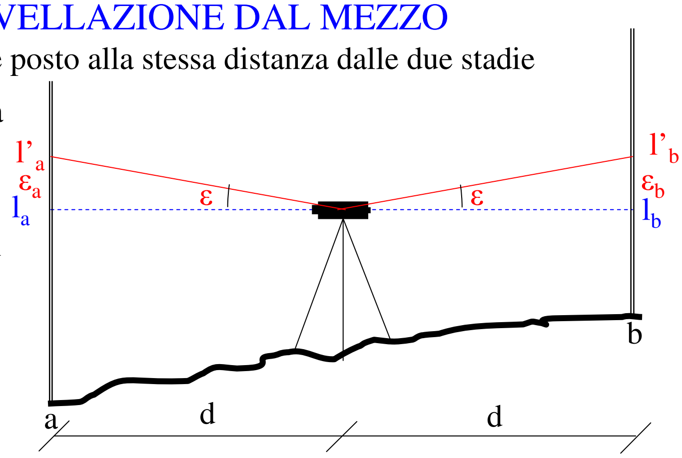
E' consigliabile eseguire le battute mediante il metodo della

LIVELLAZIONE DAL MEZZO

Il livello è posto alla stessa distanza dalle due stadie

errori dovuti alla rifrazione

errori di srettifica del livello mira non perfettamente orizzontale



$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = d \tan \varepsilon \quad l_a^{'} = l_a + \varepsilon_a \quad l_b^{'} = l_b + \varepsilon_b$$

$$\Rightarrow \Delta_{ab} = l_a^{'} - l_b^{'} = (l_a + \varepsilon_a) - (l_b + \varepsilon_b) = l_a - l_b$$

E’ in uso indicare la precisione dei livelli tramite sqm al Km ovvero dati due punti A e B distanti 1 Km si divide tale distanza in n tronchi (10-20) e si eseguono n battute di livellazione. L’sqm del dislivello ottenuto è l’sqm al Km. Tale valore va usato con cautela infatti:

-non dipende solo dallo strumento utilizzato

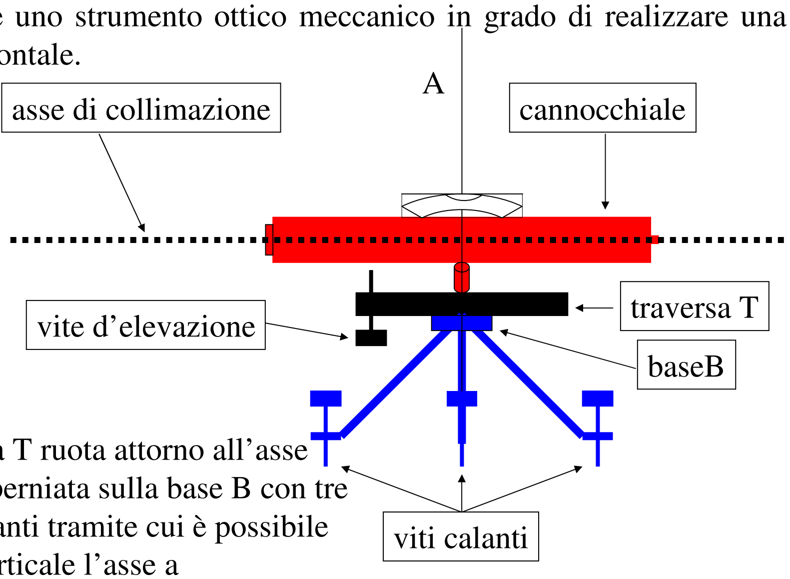
-dipende dalla lunghezza delle battute

-dipende dal dislivello

-dipende dalle condizioni ambientali

Livellazione di bassa precisione:			
SQMK ±10mm	livella 30”÷60”/2mm	ingrand. 15÷20	obb. 20÷30
Livellazione di media precisione			
SQMK ± 5mm	livella 40”/2mm	ingrand. 20÷25	obb. 30
Livellazione di media precisione			
SQMK ± 1÷2mm (lastra p.p.)	livella 10”÷25”/2mm	ingrand. 30	obb. 35÷40
Livellazione di altissima precisione			
SQMK ± 0,3÷0,5mm	livella 5”÷10”/2mm	ingrand. 40÷50	obb. 50÷60

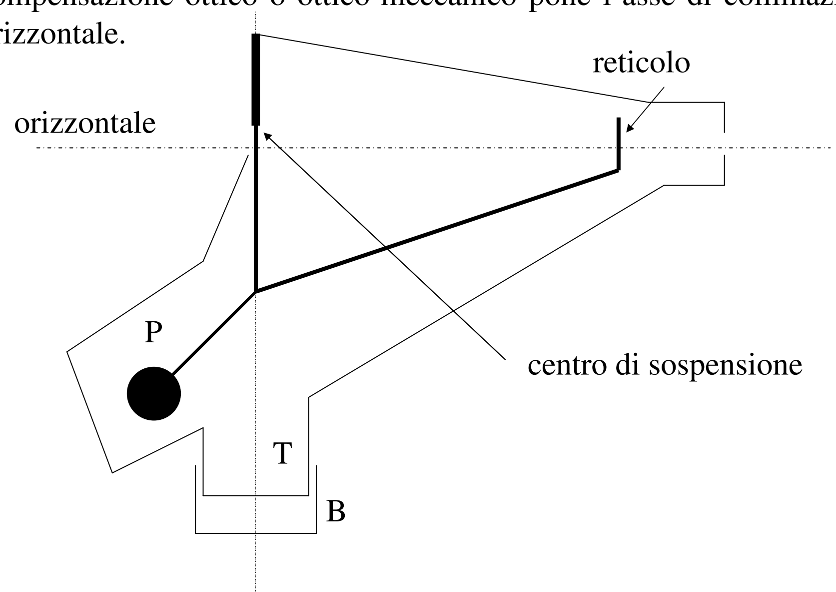
Il livello è uno strumento ottico meccanico in grado di realizzare una mira orizzontale.



La traversa T ruota attorno all’asse A ed è imperniata sulla base B con tre tre viti calanti tramite cui è possibile rendere verticale l’asse a

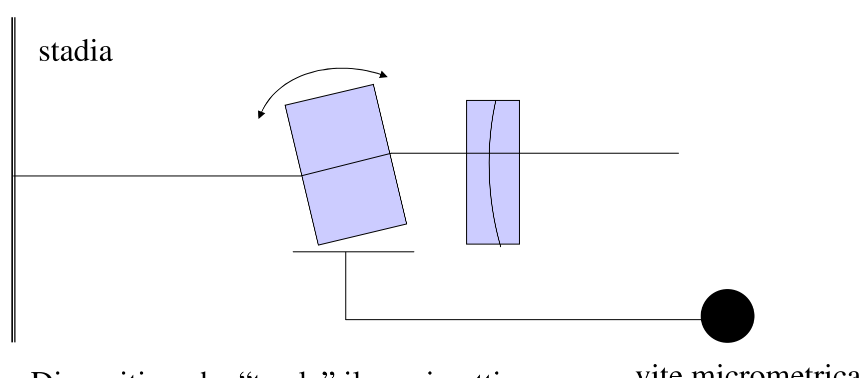
Il cannocchiale è solidale con la traversa, e tramite la livella torica e la vite d’elevazione si rende l’asse di collimazione orizzontale

In strumenti più recenti la mira orizzontale si realizza utilizzando una livella sferica solidale allo strumento, poi un dispositivo di compensazione ottico o ottico-meccanico pone l'asse di collimazione orizzontale.

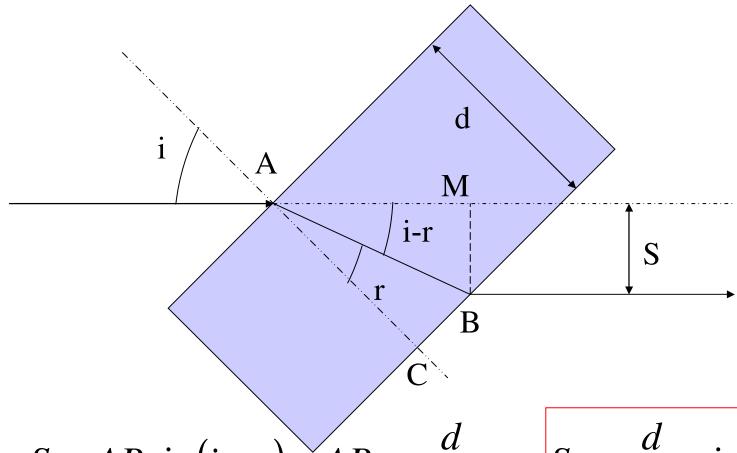


Con un livello e due stadie centimetrate posso leggere i centimetri e stimare di mm → come si raggiungono letture al 0.1 mm?

Lamina piano-parallela parallelepipedo di materiale trasparente. Costruttivamente può compiere piccole rotazioni governate da una vite micrometrica.



Dispositivo che "trasla" il raggio ottico



$$S = AB\sin(i-r) \qquad AB = \frac{d}{\cos r} \Rightarrow \boxed{S = \frac{d}{\cos r}\sin(i-r)}$$

i e r piccoli → cos(r)≈1 sin(i-r)≈(i-r)

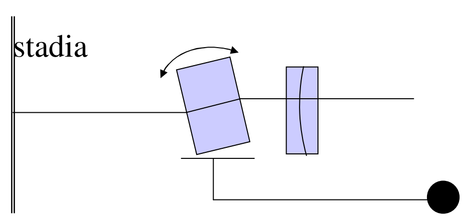
$$i \cdot n = r \cdot n' \Rightarrow r = i\frac{n}{n'} = \frac{i}{n_0} \qquad S = d\left(i - \frac{i}{n_0}\right) = d \cdot i\left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right) = i \cdot K$$

n_0=indice di rifrazione relativo

$$S = d \cdot i\left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)$$

La traslazione è proporzionale all'angolo di incidenza del raggio ottico

La lettura alla stadia è effettuata ruotando la lpp fino a collimare una divisione (centimetrica e semi-centimetrica) della stadia.

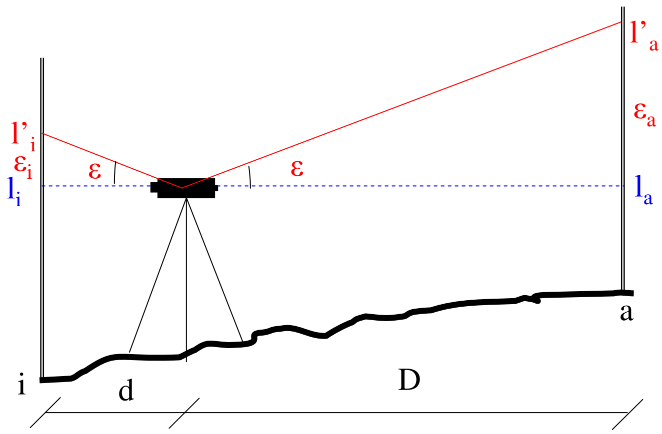


La lettura è composta in due parti stadia (centimetri) e scala della vite micrometrica interna allo strumento (decimi di millimetro).

Rettifica di un livello

Battuta dal mezzo → Δq (corretto) = $l_i - l_a$

Battuta da un estremo → $\Delta q' = l'_i - l'_a = (l_i + \varepsilon_i) - (l_a + \varepsilon_a) = (l_i - l_a) + \varepsilon_i - \varepsilon_a$



$\varepsilon_i = \varepsilon d \qquad \varepsilon_a = \varepsilon D$

$\Delta q = \Delta q' + \varepsilon(D-d)$

$\varepsilon = (\Delta q - \Delta q')/(D-d)$

Affinché il livello sia rettificato occorre che, a livella centrata la lettura in avanti sia $l_a = l'_a - \varepsilon D$. Si corregge agendo sul reticolo

Quanto deve essere preciso il posizionamento nel "mezzo" del livello?

D, d = distanze maggiore e minore dalle stadie

l'errore del dislivello è pari a $\varepsilon(D-d)$ dobbiamo verificare che questa quantità sia una frazione delle fluttuazioni accidentali.

$\varepsilon'' = 5'' = 2{,}5 \; 10^{-5}$ rad

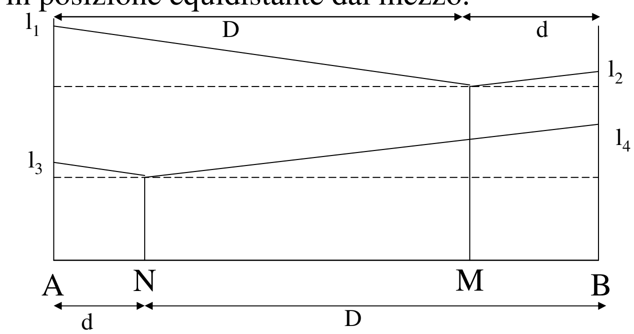
imponiamo che l'effetto dell'errore di rettifica non superi 0,1 mm

$2{,}5 \; 10^{-5} (D-d) < 0{,}1 \rightarrow (D-d) < 0{,}4 \; 10^{-1} \; 10^{5} = 4000 \text{ mm} = 4 \text{ m}$

Livellazione reciproca <u>simmetrica</u>

è utilizzata quando non è possibile effettuare la livellazione nel mezzo.
Si pone lo strumento in posizione equidistante dal mezzo.

schema



$M \Rightarrow Q_B - Q_A =$
$= l_1 - l_2 - \varepsilon(D-d)$

$N \Rightarrow Q_B - Q_A =$
$= l_3 - l_4 + \varepsilon(D-d)$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = \frac{l_1 - l_2 + l_3 - l_4}{2}$$

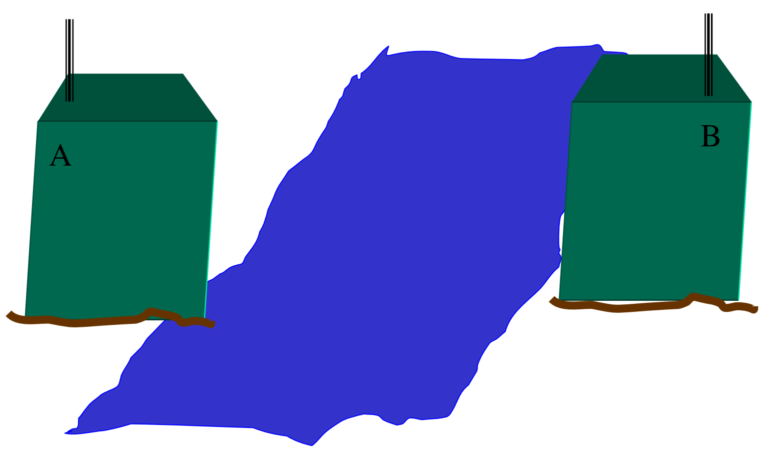
La media dei due dislivelli misurati in M e N fornisce il dislivello corretto dall'influenza dell'errore di rettifica

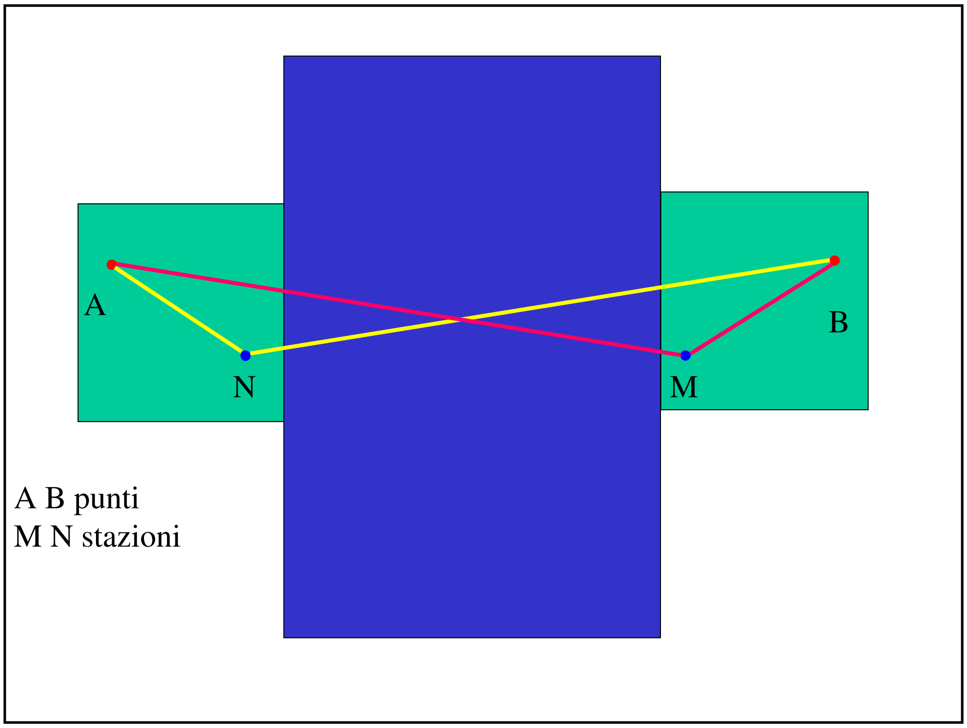
$$\varepsilon = \frac{(l_1 - l_2) - (l_3 - l_4)}{2(D-d)}$$

note d e D si può ricavare l'errore di rettifica

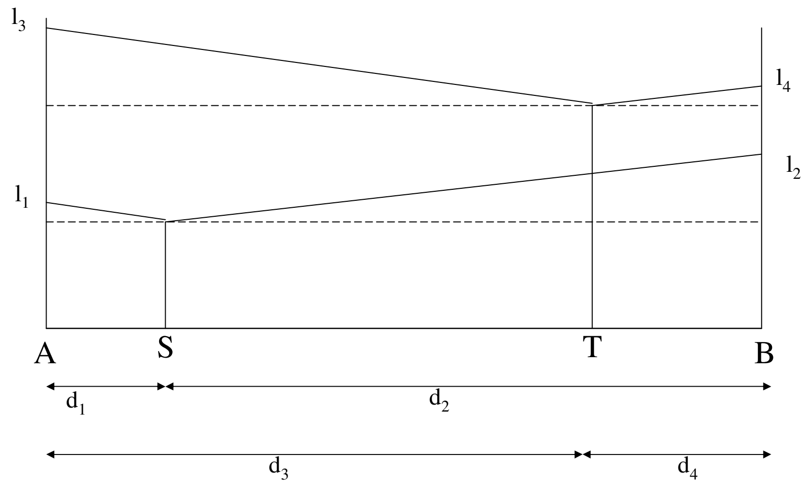
E' meno precisa della livellazione dal mezzo → quattro letture rispetto a due!

Applicazione: trovare dislivello tra due punti A e B separati da un fiume!



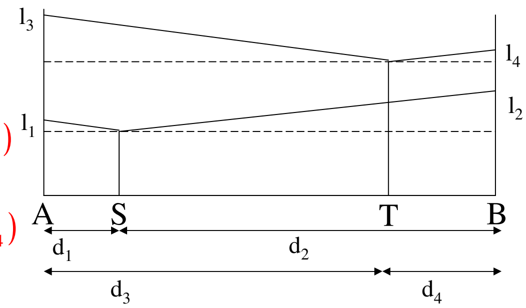


In alcuni casi non è possibile operare mediante lo schema della livellazione reciproca simmetrica →livellazione reciproca <u>asimmetrica</u>



Le distanze d_1, d_2, d_3 e d_4 sono misurate con i livelli forniti di reticolo distanziometrico (ved. distanza con stadia verticale)

Livellazione reciproca
asimmetrica
schema



$$S \Rightarrow Q_B - Q_A = (l_1 - \varepsilon d_1) - (l_2 - \varepsilon d_2)$$

$$T \Rightarrow Q_B - Q_A = (l_3 - \varepsilon d_3) - (l_4 - \varepsilon d_4)$$

calcolo dell'errore di rettifica ε

$$(l_1 - l_2) - \varepsilon(d_1 - d_2) - (l_3 - l_4) - \varepsilon(d_4 - d_3) = 0$$
$$(l_1 - l_2) - (l_3 - l_4) = \varepsilon[(d_1 - d_2) + (d_4 - d_3)]$$

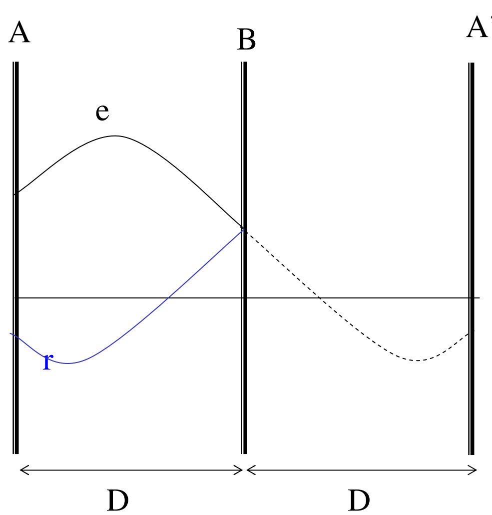
$$\boxed{\varepsilon = \frac{(l_1 - l_2) - (l_3 - l_4)}{(d_1 - d_2) - (d_3 - d_4)}}$$

Calcolo del dislivello Δ_{AB} noto ε

$$\Delta_{AB} = \frac{(l_1 - l_2) - \varepsilon(d_1 - d_2) + (l_3 - l_4) - \varepsilon(d_3 - d_4)}{2} = \frac{\Delta_S + \Delta_T}{2}$$

Misura di distanze mediante onde elettromagnetiche

$D<\lambda/2$



onda emessa in A
$s_e(t)=A \text{ sen } (\omega t+\varphi_0)$

onda rientrante in A riproduce i valori s_e ritardati di $\Delta t=2D/v$ v = velocità dell'onda

$s_r(t)=A \text{ sen}(\omega(t-\Delta t)+\varphi_0)$

all'istante t il valore dell'onda rientrante è uguale al valore dell'onda in uscita Δt secondi prima!

quindi→ $s_r(t)=A \text{ sen}(\omega t- \omega\Delta t+\varphi_0) = A \text{ sen} (\omega t- \varphi + \varphi_0)$

dove con φ si indica lo sfasamento (differenza di fase tra onda entrante ed uscente), quindi:

$\varphi=\omega\Delta t$
ricordando che: $\omega=2\pi/T$ $\Delta t=2D/v$ $T=\lambda/v$

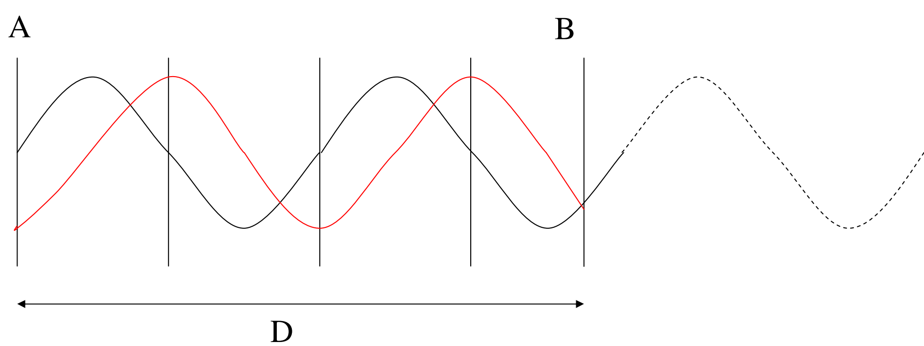
$$\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{2D}{v} = \frac{2\pi v}{\lambda}\frac{2D}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}2D$$

$$\boxed{D = \frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda}{2}}$$ Equazione fondamentale dei distanziometri a onde

Misurando lo sfasamento dell'onda si ottiene la distanza D come frazione ($0< \varphi/2\pi <1$) di metà della lunghezza d'onda impiegata

Lo strumento che misura la differenza di fase tra due onde è chiamato discriminatore di fase.

Spostiamo il punto B di un numero intero di mezze lunghezze d'onda



$$D = \frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda}{2} + n\frac{\lambda}{2}$$

Per misurare una distanza mediante uno strumento ad onde occorre misurare: lo sfasamento φ e valutare, senza errore, il numero intero di mezza lunghezze nella distanza AB.

Determinazione del numero di mezze lunghezze d'onda:
se si esegue la misura della distanza D utilizzando due lunghezze d'onda si ha:

$$D = L_1 + n\frac{\lambda_1}{2} \qquad D = L_2 + n\frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow n = \frac{L_2 - L_1}{\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}}$$

n è ricavato nell'ipotesi che il numero di mezze lunghezze d'onda nella distanza D sia lo stesso per le due onde (λ_1 λ_2)

Distanza limite

date due onde con lunghezze $\lambda_1 > \lambda_2$ si ricava la distanza limite alla quale il numero intero di mezze lunghezza d'onda rimane uguale

$$D_{Lim} = n^*\frac{\lambda_1}{2} = \left(n^* + 1\right)\frac{\lambda_2}{2}$$

Distanza entro la quale la prima onda è contenuta n volte e la seconda n+1 (in termini di mezze lunghezze d'onda!)

se D=λ_1/2 → L_1=0 e L_2= (λ_1- λ_2)/2
se D=kλ_1/2 → L_1=0 e L_2= k(λ_1- λ_2)/2
si può definire una distanza pari a n^* λ_1/2 per cui L_2= λ_2/2 ovvero sono nulle le parti frazionarie L_1 ed L_2.

$$n^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad D_{Lim} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Si noti che per distanze superiori a D_{Lim} è possibile ripetere lo schema e quindi definire una $D'_{Lim}=2D_{Lim}$ in cui è contenuto un numero $2n^*$ di $\lambda_1/2$ e $(2n^* +2)$ di $\lambda_2/2$; e una $D''_{Lim}=3D_{Lim}$ in cui è contenuto un numero $3n^*$ di $\lambda_1/2$ e $(3n^* +3)$ di $\lambda_2/2$; …

Valutando n con l'impiego di due lunghezze d'onda si ottiene la misura della distanza a meno di multipli interi di D_{Lim}

Calcolo di D_{Lim} $\lambda_1=10{,}000000$ m $\lambda_2=9{,}975064$ m

$D_{Lim}=(10*9{,}975064)/2(10-9{,}975064)=2000{,}133141$ m

con queste due lunghezze d'onda si misurano distanze a meno di multipli interi di 2Km

Nei distanziometri ad onde si impiegano da un minimo di tre fino a decine di lunghezze d'onda diverse.
Precisione della misura 10^{-6} della lunghezza d'onda

Metodo con lunghezze d'onda crescente a multipli di 10

1- $\lambda=20$ m → lettura L_{10}, porzione di distanza che eccede 10 m (valore compreso tra 0 e 10 metri, sqm ±1, ±2 cm) della lettura si conservano le cifre corrispondenti ai metri, decimetri e centrimetri

2-$\lambda=200$ m → lettura L_{100}, porzione di distanza che eccede 100 m (valore compreso tra 0 e 100 metri, sqm ±10, ±20 cm) della lettura si conserva solo la cifra corrispondente alla decina dei metri

3- $\lambda=2000$ m → lettura L_{1000}, porzione di distanza che eccede 1000 m (valore compreso tra 0 e 100 metri, sqm ±100, ±200 cm) della lettrura si conserva solo la cifra corrispondente al centinuaio di metri

4- $\lambda=20000$ m →… cifra dei Km …

Tre lunghezze d'onda di cui due poco differenti

λ_1= 10 λ_2=9,975064 λ_3=9,523808 metri corrispondenti alla frequenze f_1=29,97 f_2=30,04492 f_3=31,4685 MHz

distanza limite per λ_1, λ_2 → 2000 metri
distanza limite per λ_1, λ_3 → 100 metri

nell'ipotesi che la distanza da misurare sia entro i 2000 m si effettuano tre misure L_1, L_2 e L_3

$$D = L_1 + n\frac{\lambda_1}{2} \qquad D = L_2 + n\frac{\lambda_2}{2} \qquad D = L_3 + n\frac{\lambda_3}{2}$$

Con L_2 e L_1 → $n_{appr} = \dfrac{L_2 - L_1}{\dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{\lambda_2}{2}}$ → $D_{appr} = L_1 + n_{appr}\dfrac{\lambda_1}{2}$

D_{appr} a meno di 30 metri!

Con L_3 e L_1 → $p = \dfrac{L_3 - L_1}{\dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{\lambda_3}{2}}$ → $D_{100} = L_3 + p\dfrac{\lambda_3}{2}$

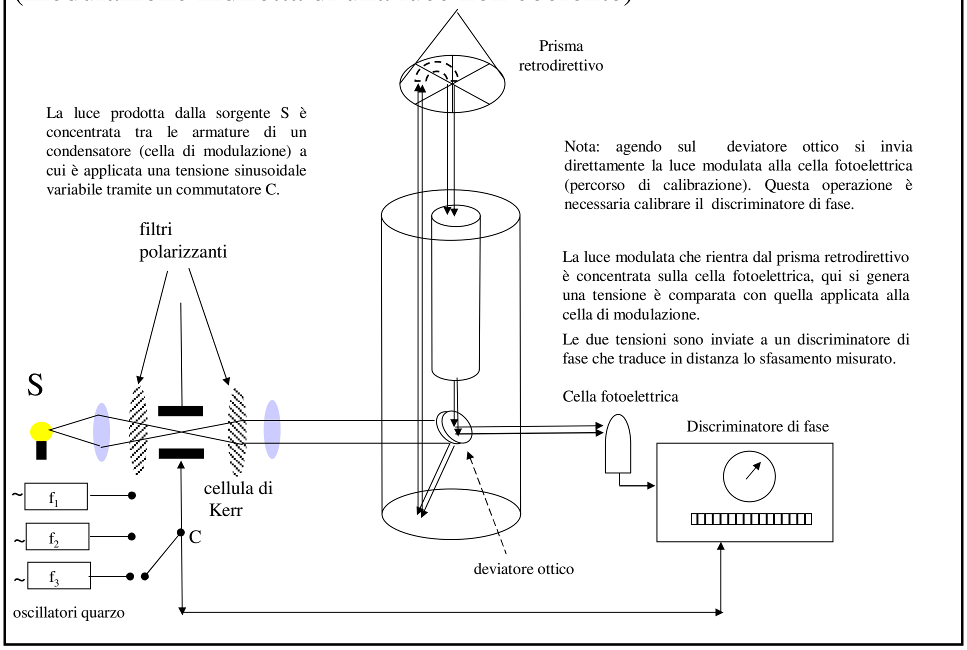
Ovvero misuro la porzione di distanza che eccede un numero intero di ettometri (distanza limite λ_1 λ_3 100m)

se n_{appr} fosse esatto allora la quantità $\Delta = D_{appr} - D_{100}$ dovrebbe differire di un numero intero di ettometri. Si può valutare in numero corretto di ettometri contenuto nella distanza arrotondando la differenza Δ al centinaio di metri più vicino. Quindi calcolare D''' come

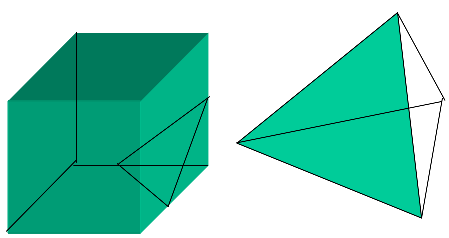
$$D''' = (\Delta)_{ARR} + p\frac{\lambda_3}{2} + L_3 \Rightarrow n = (D''' - L_1)\frac{2}{\lambda_1}$$

e quindi con il valore corretto di n calcolare D' e D'' → la media dei valori costituisce il risultato finale

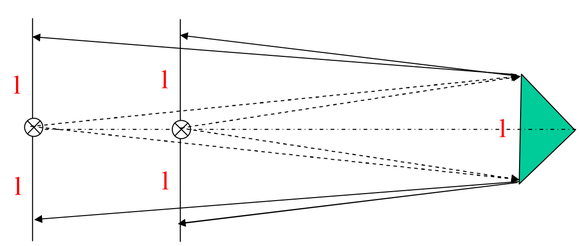
Schema di massima di un distanziometro ad onde
(modulazione indiretta di una luce non coerente)



Riflettore passivo: prisma trirettangolo o retrodirettivo

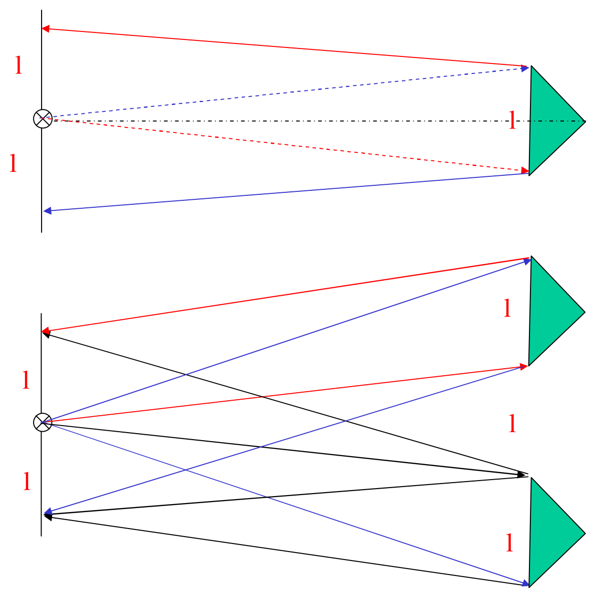


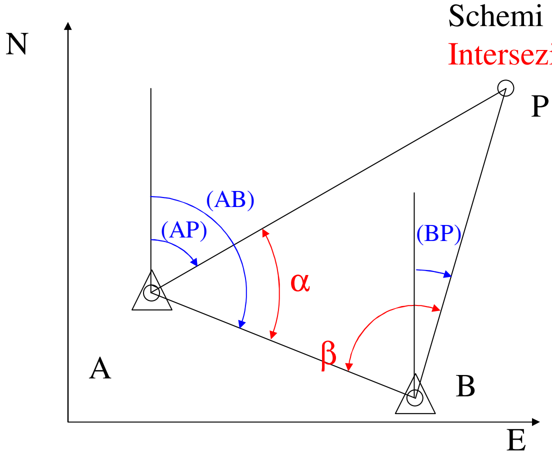
la radiazione che investe la superficie del prisma è riflessa sul punto in cui la luce viene emessa anche se la normale al prisma è ruota di 20° rispetto alla direzione del raggio incidente



La superficie illuminata dal riflettore è due volte più grande dell'area della faccia anteriore del prisma, indipendentemente dalla distanza

Se si impiegano più prismi l'area illuminata rimane la stessa, ma aumenta la quantità di radiazione riflessa.





Schemi elementari di rilievo di punti
Intersezione semplice

Dai punti di coordinate note A e B, si possono misurare:
1) due angoli ai vertici A e B
2) due distanze (AP, BP)
3) un angolo e una distanza

Risoluzione misura di due angoli

1) Angolo di direzione → $\tan(AB) = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$

2) Distanza AB → $AB = \frac{X_B - X_A}{\sin(AB)} = \frac{Y_B - Y_A}{\cos(AB)}$

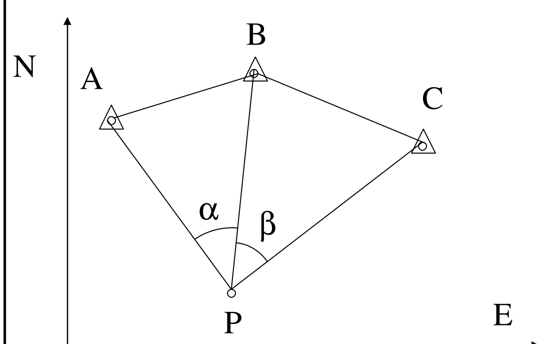
3) Teorema dei seni → $AP = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} \sin\beta$ $\quad BP = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} \sin\alpha$

(AP) = (AB) — α (BP) = (AB) — π + β

4) Infine doppio modo

$$X_P = X_A + AP\sin(AP) \qquad X_P = X_B + BP\sin(BP)$$
$$Y_P = Y_A + AP\cos(AP) \qquad Y_P = Y_B + BP\cos(BP)$$

Schemi elementari di rilievo di un punto: Intersezione inversa



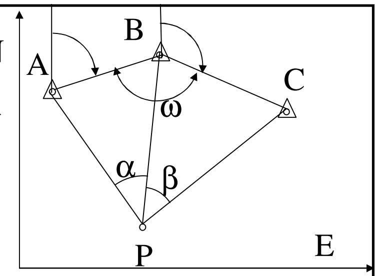
Da un punto P, di coordinate incognite si misurano due angoli (APB, e BPC). Attraverso semplici relazioni geometriche si ricavano le coordinate del punto P nel sistema di riferimento dei punti A, B e C.

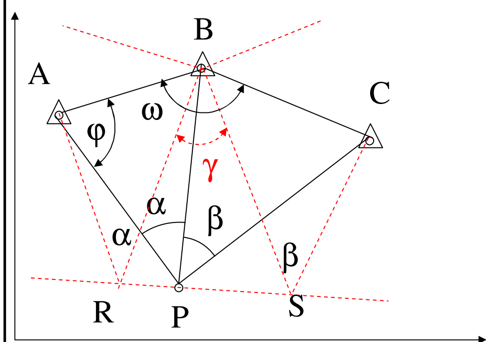
Angoli di direzione (AB) (BC)

$$(AB) = \arctan\frac{E_B - E_A}{N_B - N_A} \qquad (BC) = \arctan\frac{E_C - E_B}{N_C - N_A}$$

$$\omega = (BA) - (BC) = (AB) + \pi - (BC)$$

Distanze a=AB e b=BC





Angoli BAR e BCS BPS RB… SB… retti.
ARB=α e BSC=β

$$\overline{BR} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} \qquad \overline{BS} = \frac{\overline{BC}}{\sin\beta}$$

$$\gamma = \alpha + \beta + \omega - \pi$$

Carnot applicato al triangolo BRS

$$\overline{RS} = \left(\overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 - 2\overline{BR}\,\overline{BS}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$$

Area del triangolo BRS

$$2S_{BRS} = \overline{BR}\,\overline{BS}\sin\gamma$$ poi si calcola la lunghezza BP

$$\overline{BP} = \frac{2S_{BRS}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{BR}\,\overline{BS}\sin\gamma}{\left(\overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 - 2\overline{BR}\,\overline{BS}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$$

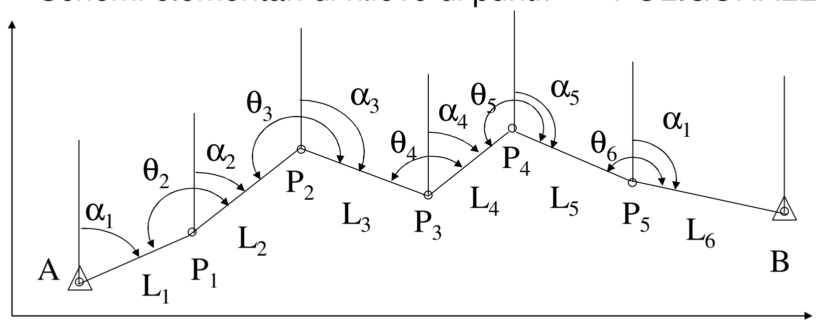
$$\frac{\overline{BP}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} \rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}\sin\alpha$$

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi - (\alpha + \varphi))} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} \rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}\sin(\alpha + \varphi)$$

Abbiamo calcolato la distanza AP, e l'angolo di direzione (AP)=(AB)+φ, le coordinate del punto P si ottengono mediante le relazioni:

$$E_P = E_1 + \overline{AP}\sin(AP)$$
$$N_P = N_1 + \overline{AP}\cos(AP)$$

Schemi elementari di rilievo di punti: POLIGONALE



Da un punto A, di coordinate note si misura una distanza (AP1) ed

un azimut α_1 al punto P_1 – poi si staziona in P_1 e si misura la

distanza (P_1P_2) e l'angolo $AP_1P_2= \theta_2$.

Da θ_2 ricaviamo $\alpha_2 = \alpha_1+ \theta_2 \pm \pi$

Iterando … $\alpha_i = \alpha_{i-1} + \theta i \pm \pi$

Schemi elementari di rilievo di un punto:

Poligonale

Coordinate del punto P_1:

$E_1 = E_A + L_1$ sen (α_1) $N_1 = N_A + L_1 \cos(\alpha_1)$

L_1 = distanza P_{A1}

più in generale si ha:

$E_i = E_{i-1} + L_i$ sen (α_i) $N_i = N_{i-1} + L_i \cos(\alpha_i)$

NB. in figura $E_B = E_5 + L_6$ sen (α_6) $N_B = N_5 + L_6 \cos(\alpha_6)$

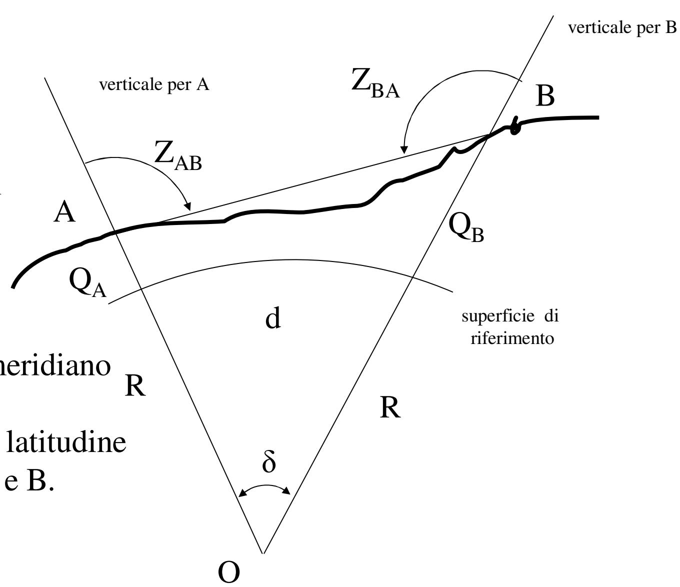
CONTROLLO!!!

Misura indiretta dei dislivelli
livellazione trigonometrica
schema

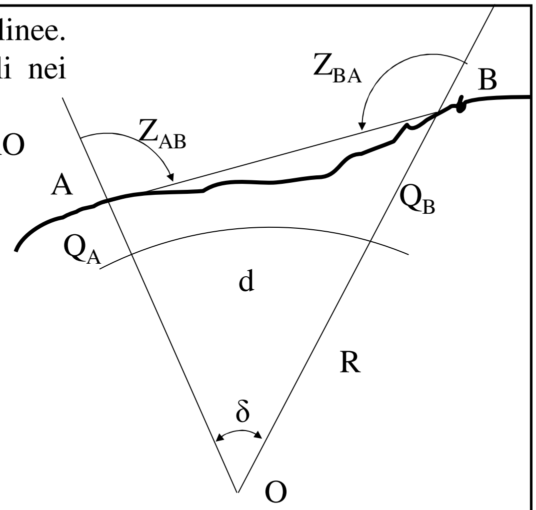
Distanza AB
una decina di Km

$$R = \sqrt{\rho N}$$

ρ = raggio del meridiano
N= grannormale
calcolati per una latitudine intermedia tra A e B.



Le traiettorie dei raggi sono rettilinee.
Si misurano le distanze zenitali nei punti A e B con un teodolite.
Si applichi la formula di NEPERO al triangolo OAB.



$$\frac{Q_B + R - (Q_A + R)}{Q_B + R + (Q_A + R)} = \frac{\tan\frac{1}{2}[\pi - z_{AB} - (\pi - z_{BA})]}{\tan\frac{1}{2}[\pi - z_{AB} + (\pi - z_{BA})]} \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\delta = \frac{d}{R} \qquad z_{AB} + z_{BA} = \pi + \delta$$

$$\tan\frac{\delta}{2} \cong \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{12} + \cdots\right) = \frac{d}{2R}\left(1 + \frac{d^2}{12R^2} + \cdots\right)$$

si può porre $\tan\frac{\delta}{2} = \frac{d}{2R}$ poiché il termine $\frac{d^2}{12R^2} << 1$

(d=30 km → 2 10^{-6})

$$\frac{Q_B + R - (Q_A + R)}{Q_B + R + (Q_A + R)} = \tan\frac{1}{2}[\pi - z_{AB} - (\pi - z_{BA})]\tan\frac{\delta}{2}$$

$$Q_B - Q_A = (Q_B + Q_A + 2R)\frac{d}{2R}\tan\frac{1}{2}[z_{BA} - z_{AB}]$$

$$Q_B - Q_A = d\left(1 + \frac{Q_B + Q_A}{2R}\right)\tan\frac{1}{2}\left[z_{BA} - z_{AB}\right]$$

$$Q_m = \frac{Q_B + Q_A}{2}$$

$$\boxed{Q_B - Q_A = d\left(1 + \frac{Q_m}{R}\right)\tan\frac{1}{2}\left[z_{BA} - z_{AB}\right]}$$

Il dislivello è composto da due termini d*tan() (predominante) e Q_m/R*tan() (correzione).

Il valore di distanza potrebbe sembrare superfluo in quanto dalle misure delle zenitali si può ricavare δ e quindi d !?

Il metodo proposto è oneroso poiché richiede l'esecuzione di due misure (due teodoliti di grande precisione). Nella pratica si esegue una sola misura, quindi facendo stazione nel punto A e ricordando che

$$z_{AB} + z_{BA} = \pi + \delta \quad e \quad \tan\frac{\delta}{2} = \frac{d}{2R}$$

$$\tan\frac{1}{2}\left[z_{BA} - z_{AB}\right] = \tan\frac{1}{2}\left[\pi + \delta - z_{AB}\right] =$$

$$= \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(z_{AB} - \frac{\delta}{2}\right)\right] = \cot\left(z_{AB} - \frac{d}{2R}\right)$$

$$\boxed{Q_B - Q_A = d\left(1 + \frac{Q_m}{R}\right)\cot\left(z_{AB} - \frac{d}{2R}\right)}$$

L'espressione è leggermente cambiata se si considera l'effetto della rifrazione atmosferica

$$\boxed{Q_B - Q_A = d\left(1+\frac{Q_m}{R}\right)\cot\left(\zeta_{AB} - \frac{1-K_A}{2R}d\right)}$$

Dove ζ_{AB} è la direzione zenitale misurata e K_A è un coefficiente legato alla rifrazione (0.13-0.15).

distanza	1 Km	5 Km	10 Km	20 Km	30 Km
errore dislivello	0,1 cm	2 cm	8 cm	32 cm	72 cm