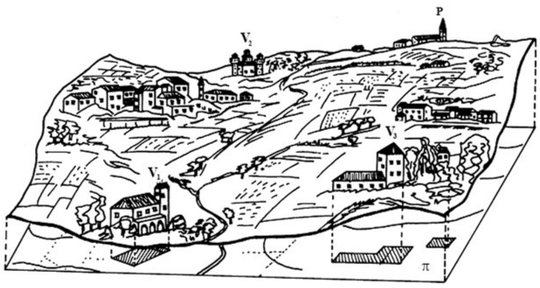
CARTOGRAFIA



rappresentare il territorio sul piano

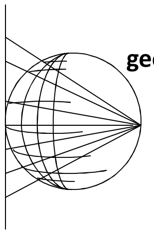
LA TERRA E'UNA SUPERFICIE COMPLESSA
E COMUNQUE NON E' RAPPRESENTABILE
MEDIANTE UNA FORMULA MATEMATICA

Superficie topografica (P)

Ellissoide (P')

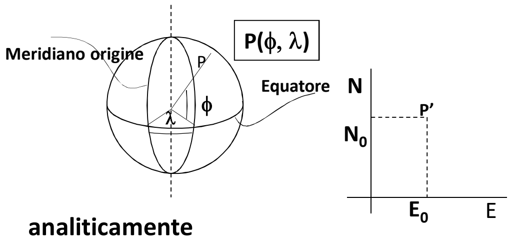
Rappresentazione piana

RAPPRESENTAZIONE PIANA



geometricamente

Proiezioni prospettiche



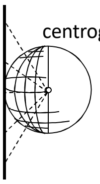
analiticamente

$E = f(\phi, \lambda)$
$N = g(\phi, \lambda)$

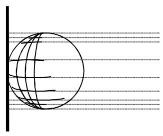
Le proiezioni più comuni avvengono

su un piano > prospettiche

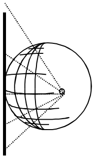
la proiezione può avvenire da punti diversi



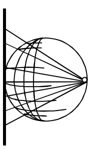
centrografica



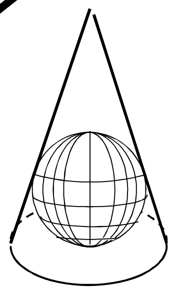
ortografica



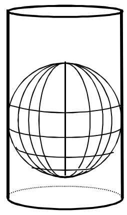
scenografica



stereografica



coniche



cilindriche

su superfici di rotazione sviluppabili nel piano

L'ellissoide non è una superficie sviluppabile sul piano

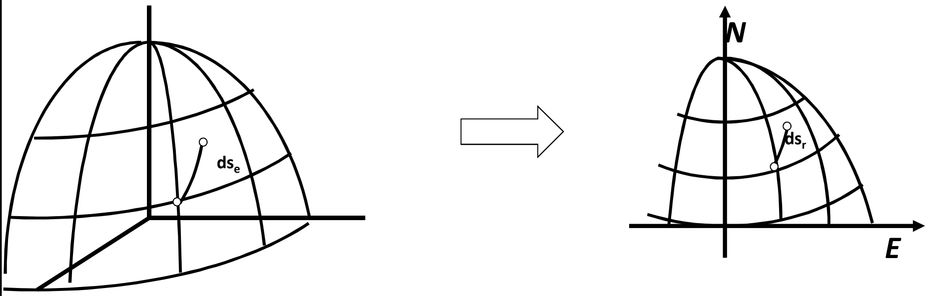
⇓

La rappresentazione piana è deformata

Modulo di deformazione lineare

$$\mu = ds_r / ds_e$$

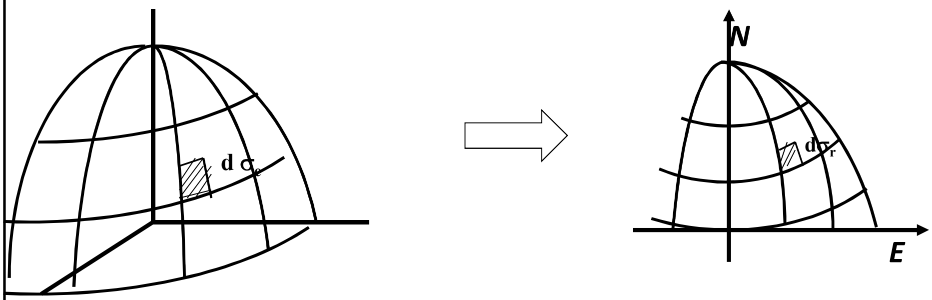
ELLISSOIDE **PIANO**



Modulo di deformazione areale

$$m_a = d\sigma_r / d\,\sigma_e$$

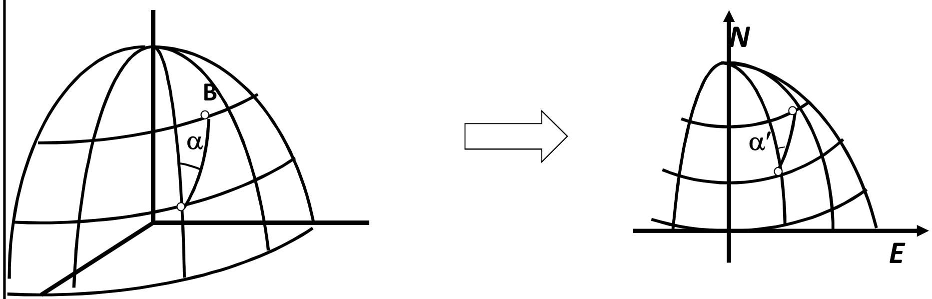
ELLISSOIDE **PIANO**



Deformazione angolare

$$\delta = \alpha' - \alpha$$

ELLISSOIDE **PIANO**

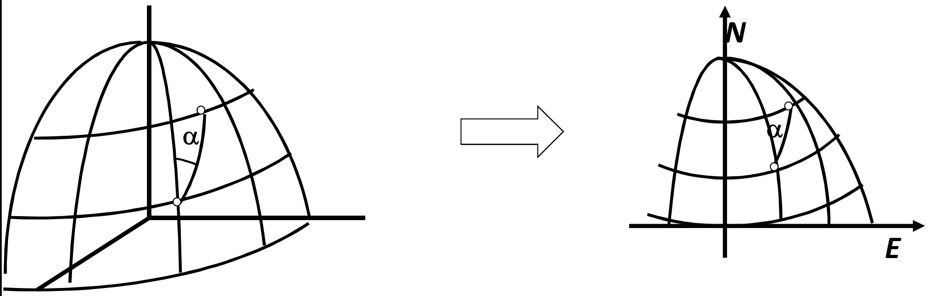


CLASSIFICAZIONE DELLE RAPPRESENTAZIONI

Una carta è conforme (isogonica)
quando CONSERVA GLI ANGOLI

Nel passaggio cioè fra

ELLISSOIDE **PIANO**

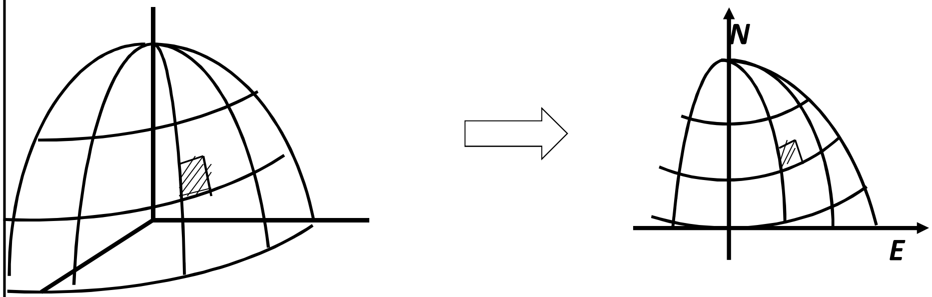


rimane invariato α, angolo fra due direzioni uscenti da un punto $\delta = 0$

Una carta è equivalente quando
CONSERVA LE AREE

Nel passaggio cioè fra

ELLISSOIDE PIANO



rimane invariata l'area del quadrilatero infinitesimo

$m_a = 1$

Una carta è afilattica quando SONO PRESENTI TUTTI I TIPI DI DEFORMAZIONI, MA OGNUNO E' MANTENUTO NEI LIMITI PIU' RISTRETTI POSSIBILI

EQUAZIONI ANALITICHE DELLE RAPPRESENTAZIONI

La rappresentazione dell'ellissoide sul piano è definita da due funzioni:

$x = x(\varphi,\lambda)$

$y = y(\varphi,\lambda)$

che stabiliscono la corrispondenza biunivoca tra la posizione di un punto P sull'ellissoide e la corrispondente posizione del punto P' sulla rappresentazione

tali funzioni si determinano risolvendo complesse equazioni (differenziali) ottenute imponendo le condizioni relative alla rappresentazione di interesse.

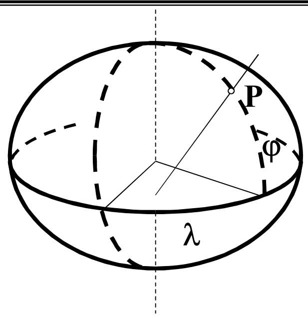
Isogona o conforme $\rightarrow \quad \delta = 0$

equivalente $\rightarrow \quad m_a = 1$

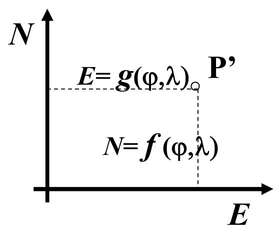
La soluzione di tali equazioni dipende da una certa funzione che deve essere particolarizzata:

in teoria esistono quindi infinite rappresentazioni di un certo tipo (ad esempio conformi), ma solo poche permettono di ottenere rappresentazioni semplici che si adattano bene a rappresentare cartograficamente una regione del globo terrestre

La cartografia ufficiale italiana adotta una rappresentazione conforme: la rappresentazione di GAUSS



Dato un generico punto P sull'ellissoide di coordinate P (φ,λ)



Le coordinate della sua proiezione P' sulla carta di Gauss sono

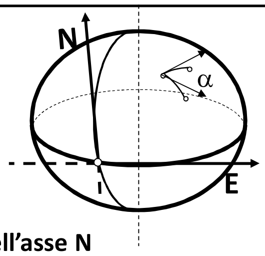
$E = g(\varphi,\lambda)$

$N = f(\varphi,\lambda)$

Le funzioni f e g sono molto complesse e realizzano particolari condizioni

È stata scelta una proiezione CONFORME per motivi storici:
prima dell'avvento dei distanziometri elettronici la maggior parte delle misure che venivano eseguite erano misure angolari.
Era quindi conveniente adottare un sistema che consentisse di inserire le misure angolari senza apportare correzioni

CONDIZIONI DELLA PROIEZIONE



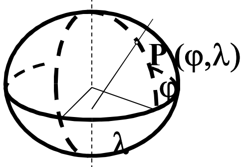
1 il meridiano origine delle longitudini deve trasformarsi nell'asse N

2 l'Equatore ellissoidico deve trasformarsi nell'asse E

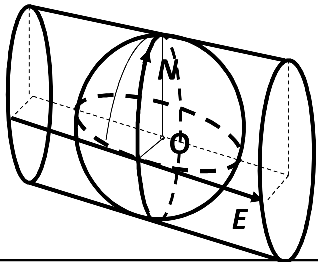
3 un arco di lunghezza m sul meridiano origine deve trasformarsi in un segmento di pari lunghezza (particolarizzazione)

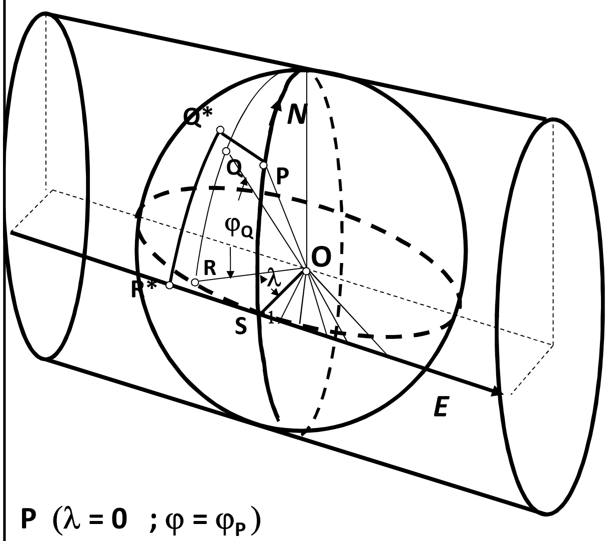
4 un angolo α formato da due direzioni uscenti da un punto sull'elllissoide deve mantenersi uguale all'angolo formato dalle corrispondenti direzioni riportate sulla carta (isogona)

5 il coefficiente di deformazione lineare μ varia da punto a punto ma è uguale per tutte le direzioni uscenti da un punto (conforme)



Le funzioni f e g della rappresentazione di Gauss
$E= g(\varphi,\lambda) \quad N= f(\varphi,\lambda)$
realizzano le condizioni prima esposte.
Tale rappresentazione è molto vicina a quella che si ottiene proiettando i punti della superficie ellissoidica su un cilindro

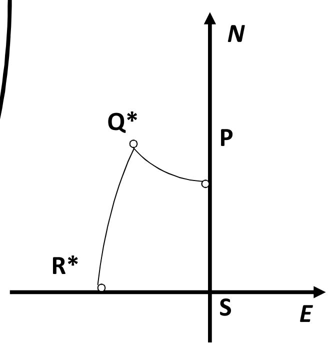




P $(\lambda = 0 \;;\; \varphi = \varphi_P)$

R $(\lambda = \lambda_1 \;;\; \varphi = 0)$

Q $(\lambda = \lambda_1 \;;\; \varphi = \varphi_Q)$



La deformazione della carta cresce all'aumentare della longitudine

Dalle funzioni *f* e *g* si ricava il coefficiente di deformazione

μ

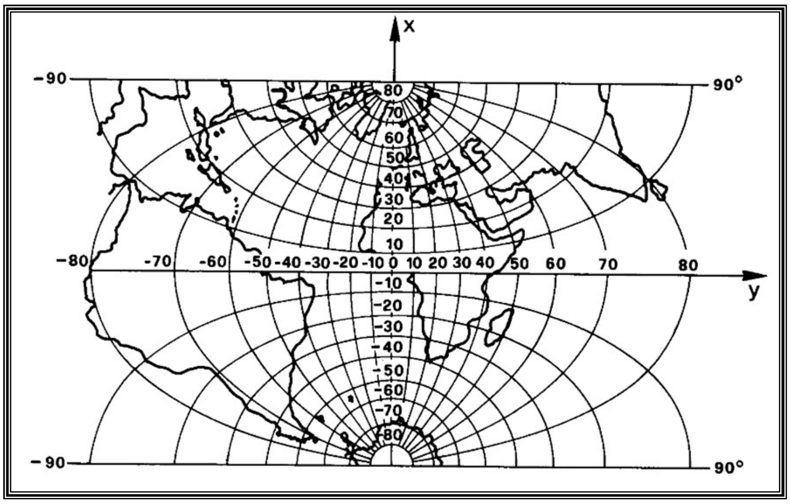
Questo coefficiente vale per elementi infinitesimi di arco (varia da punto a punto)

$$dm' = \mu \, dm$$

μ vale 1 sul meridiano centrale (asse N)

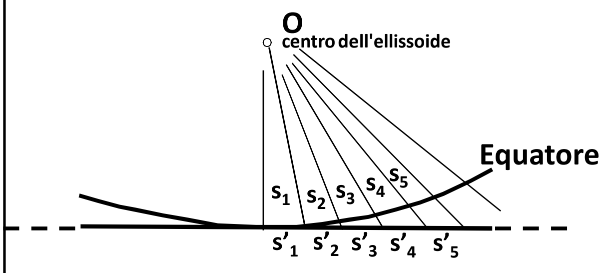
μ è maggiore di 1 altrove

Ma come deforma la proiezione di Gauss?



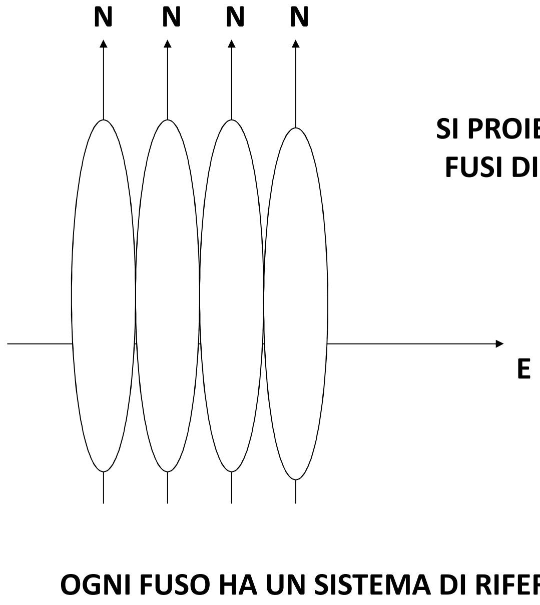
La deformazione cresce sensibilmente allontanandosi dal meridiano origine

Proiettando su un cilindro



generatrice equatoriale del cilindro

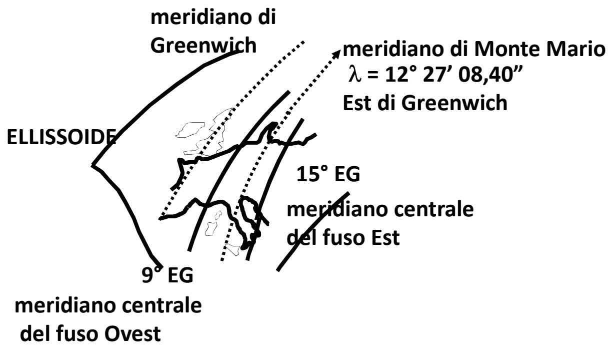
DEFORMAZIONI TROPPO RILEVANTI !

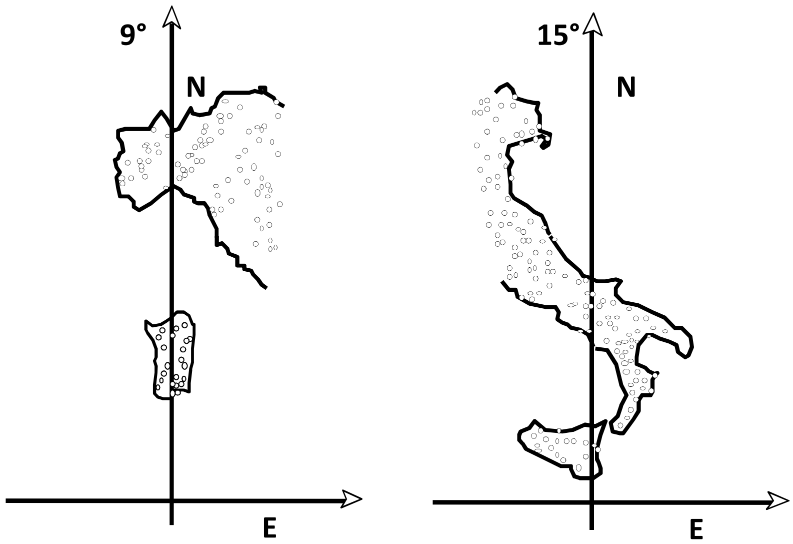


SI PROIETTA L'ELLISSOIDE SU PIU' FUSI DI AMPIEZZA LIMITATA (6^0)

OGNI FUSO HA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (N,E) INDIPENDENTE

In particolare il territorio italiano è proiettato su due fusi:
fuso Ovest e fuso Est





1500 km **Fuso Ovest**

6^0 - $12^0 30'$

2520 km **Fuso Est**

12^0 - $18^0 30'$

ANCHE PROIETTANDO IL TERRITORIO NAZIONALE SU 2 FUSI

DEFORMAZIONI TROPPO RILEVANTI

In un fuso di 6^0 di ampiezza il modulo di deformazione lineare varia tra

1.0008 ($\lambda = -3^0$) 1 ($\lambda = 0$) 1.0008 ($\lambda = 3^0$)

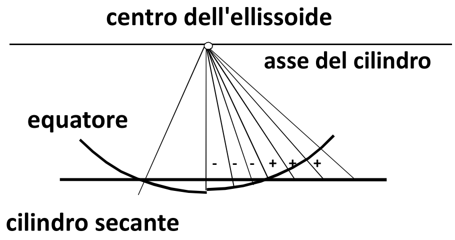
Per ridurre alla metà le deformazioni massime si contrae la rappresentazione moltiplicando le coordinate per il coefficiente 0.9996

il modulo di deformazione lineare varia tra

1.0004 ($\lambda = -3^0$) 0.9996 ($\lambda = 0$) 1.0004 ($\lambda = 3^0$)

ed assume il valore 1 lungo due linee intermedie tra il meridiano di riferimento ed i meridiani estremi

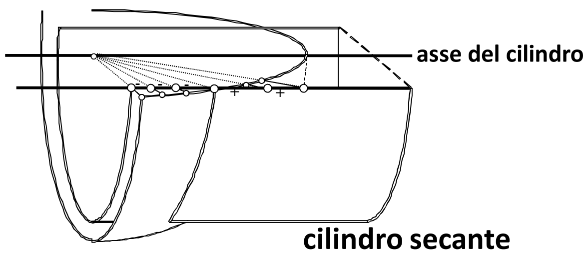
introduzione al cilindro secante



Se invece di proiettare su un cilindro tangente si proietta su un cilindro secante

SI OTTENGONO DEFORMAZIONI DI SEGNO DIFFERENTE :
CONTRAZIONI
DILATAZIONI

DEFORMAZIONI PIU' PICCOLE IN VALORE ASSOLUTO



cilindro secante

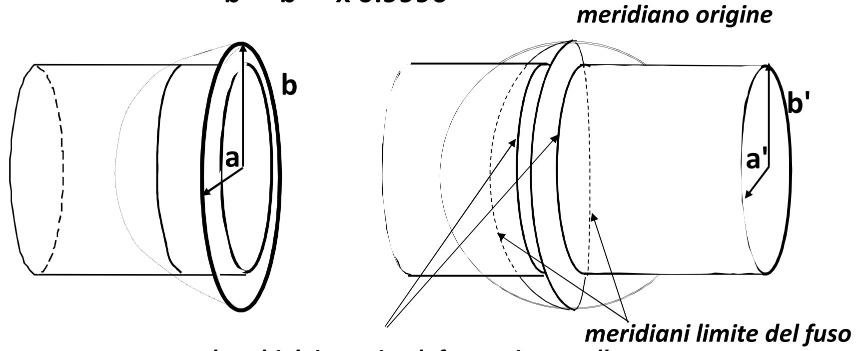
COME SI OTTIENE LA PROIEZIONE SU UN CILINDRO SECANTE?

NELLE FORMULE $E = g(\varphi,\lambda)$ $N = f(\varphi,\lambda)$

INVECE DEI VALORI DEI SEMIASSI ELLISSOIDICI a E b, SI INSERISCONO VALORI RIDOTTI DELLO 0,4 $°/_{00}$

a’ = a x 0.9996

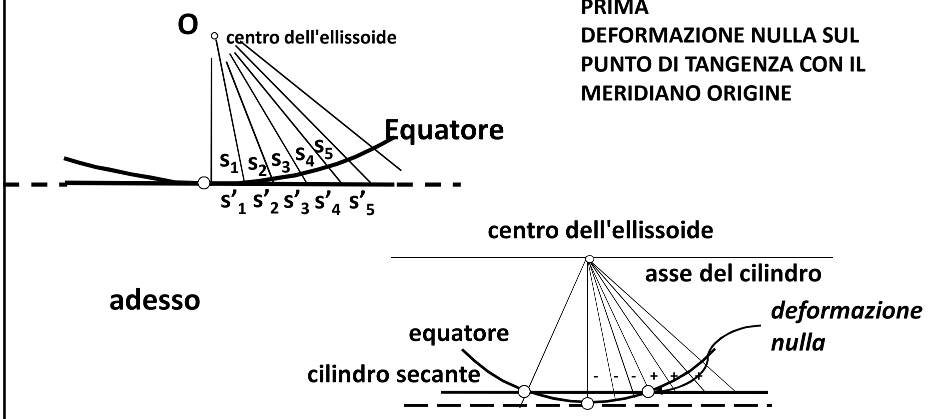
b’ = b x 0.9996



Considerando il cilindro secante una delle condizioni di Gauss non vale più

LA DEFORMAZIONE NON E’ PIU’ NULLA LUNGO IL MERIDIANO ORIGINE MA LUNGO LE INTERSEZIONI TRA CILINDRO E D ELLISSOIDE

PRIMA
DEFORMAZIONE NULLA SUL PUNTO DI TANGENZA CON IL MERIDIANO ORIGINE



PROIEZIONE DEL MERIDIANO ORIGINE

RICONSIDERIAMO LE CONDIZIONI DELLA CARTA DI GAUSS

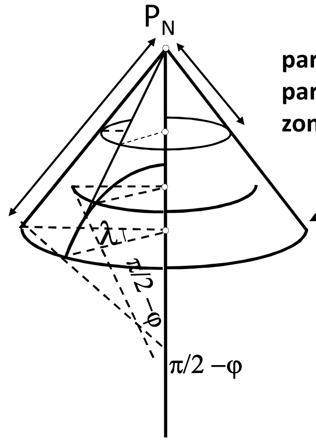
- **meridiano origine $\Rightarrow$ asse Nord**
- **equatore $\Rightarrow$ asse Est**
- **coeff. di deformazione μ varia da punto a punto ma rimane costante per tutte le direzioni uscenti da un punto**

- **angolo α fra 2 due direzioni uscenti da un punto sull'ellissoide = l'angolo α fra le tangenti alle trasformate sulla carta di quelle direzioni**

CARATTERISTICA FONDAMENTALE
la carta di Gauss è una carta conforme

ALTRE PROIEZIONI

PROIEZIONE CONICA DI LAMBERT

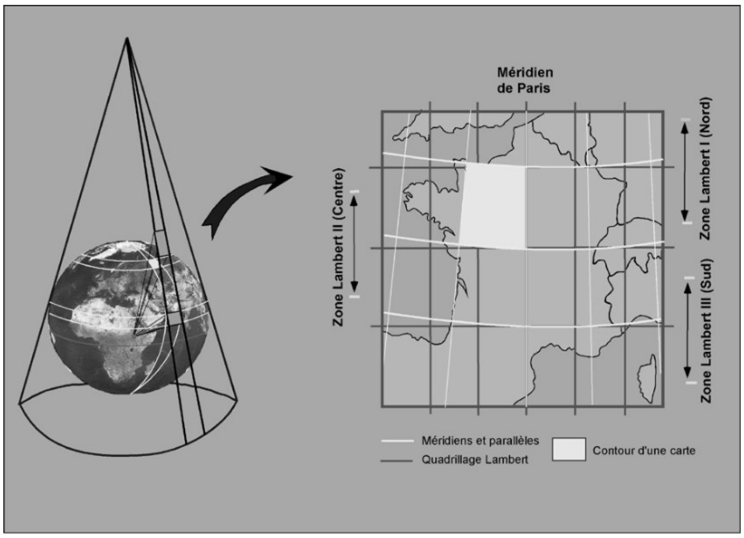


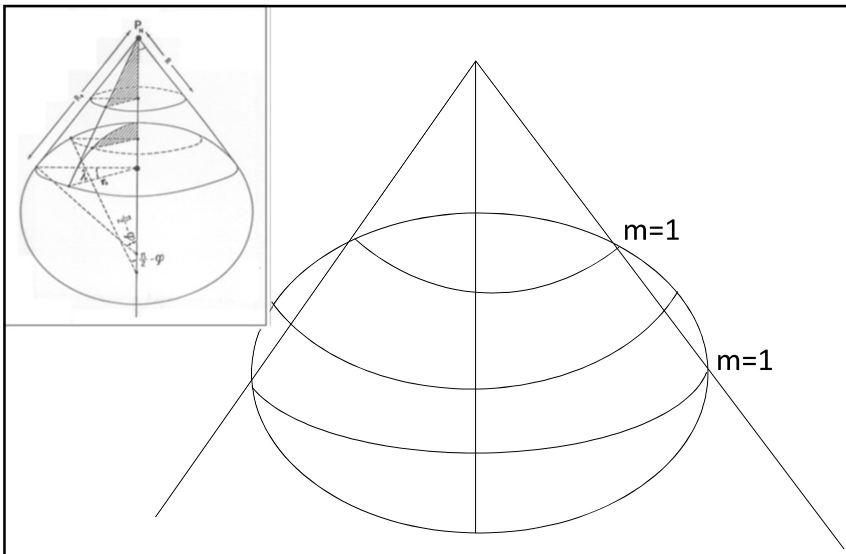
parallelo standard, parallelo medio della zona da rilevare

E' una rappresentazione conforme, in cui la superficie di riferimento viene proiettata su un cono avente l'asse coincidente con l'asse di rotazione terrestre, e tale da risultare tangente all'ellissoide lungo un parallelo, o secante l'ellissoide lungo due paralleli.

asse del cono ≡ asse dell'ellissoide

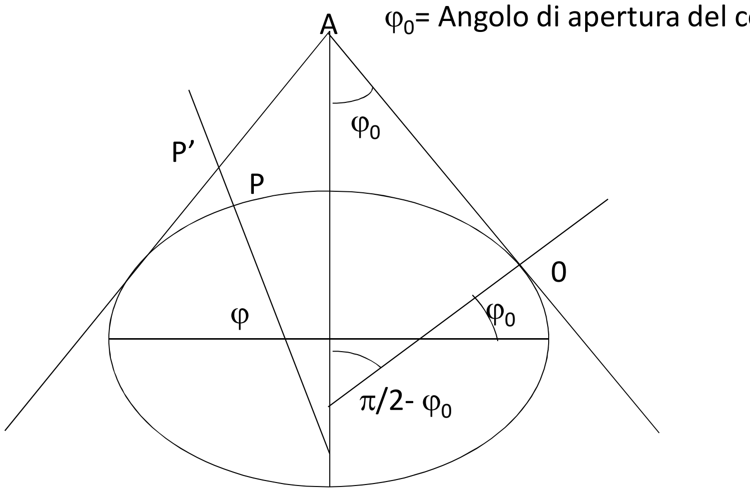
generatrice tangente al parallelo standard





Cono Secante

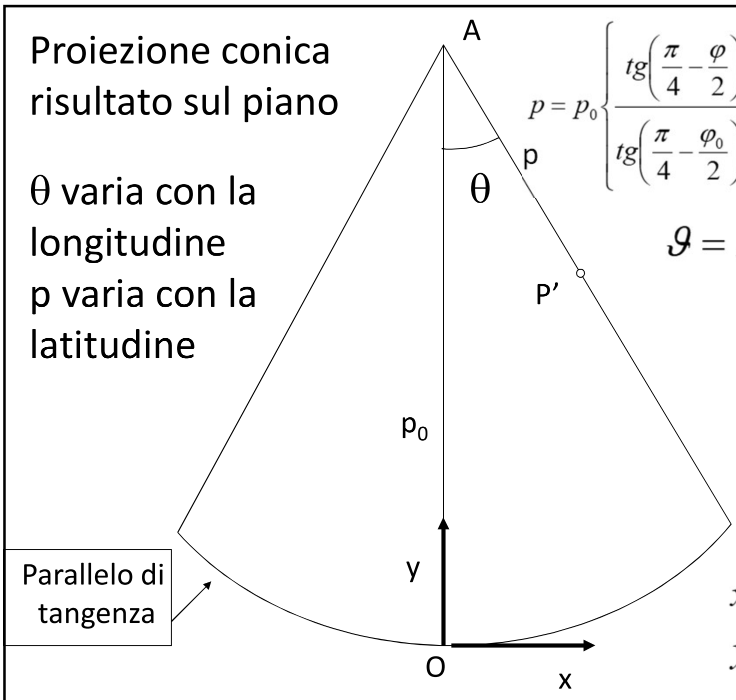
φ_0= Angolo di apertura del cono



Proiezione conica – sezione meridiana

Proiezione conica risultato sul piano

θ varia con la longitudine
p varia con la latitudine



$$p = p_0 \left\{ \frac{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right)^{e/2}}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)\left(\frac{1+e\sin\varphi_0}{1-e\sin\varphi_0}\right)^{e/2}} \right\}^{\sin\varphi_0}$$

$$\vartheta = \lambda \sin\varphi_0$$

$$x = p \sin\vartheta$$
$$y = p \cos\vartheta$$

Caratteristiche della rappresentazione conica di Lambert

La superficie della carta viene definita entro un settore circolare, il cui angolo al vertice dipende dall'angolo di apertura del cono

• I meridiani vengono rappresentati sul piano cartografico come rette uscenti dal punto omologo del vertice del cono.

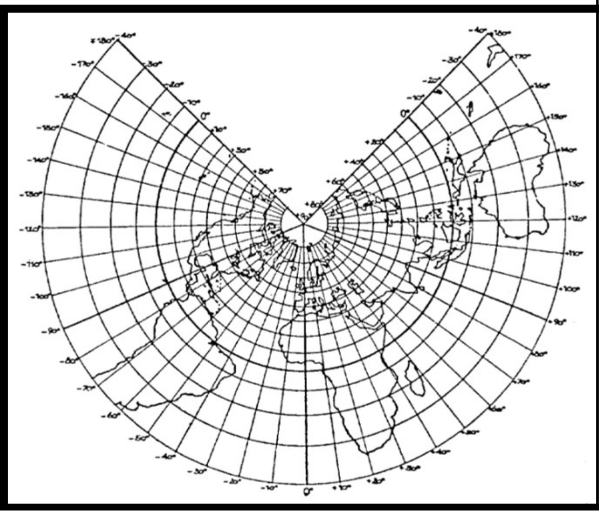
• I paralleli vengono rappresentati da archi di circonferenze.

• Le linee standard sono una (un parallelo, per il cono tangente) due (due paralleli, per il cono secante)

RISULTATO DELLA PROIEZIONE : UN SETTORE CIRCOLARE

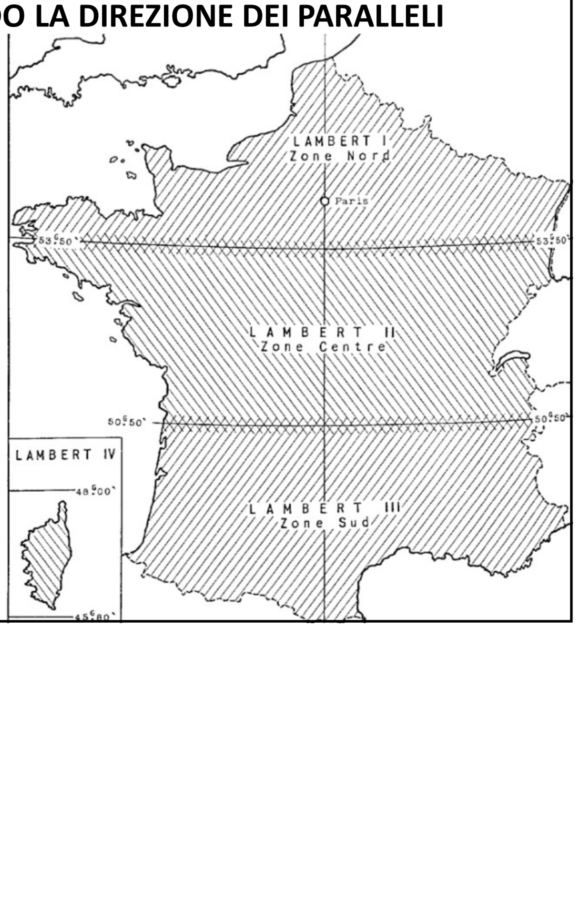
paralleli > cerchi concentrici

meridiani >rette uscenti dal punto omologo del Polo



VA BENE PER NAZIONI IL CUI TERRITORIO SI SVILUPPA PRINCIPALMENTE SECONDO LA DIREZIONE DEI PARALLELI

La carta di Lambert è utilizzata in: Francia, Belgio, Estonia, Romania, Spagna e alcuni stati del Nord America.
Per diminuire le deformazioni si può usare un fattore di riduzione (ad es. 0.9996) moltiplicando per tale valore le coordinate: ciò corrisponde a considerare non un cono tangente ma "secante": le deformazioni in questo caso sono nulle su due paralleli, detti standard, anziché sul parallelo di tangenza.



France_I
Projection: Lambert_Conformal_Conic
False_Easting: 600000.000000
False_Northing: 1200000.000000
Central_Meridian: 0.000000
Standard_Parallel_1: 55.000000
Scale_Factor: 0.999877
Latitude_Of_Origin: 55.000000

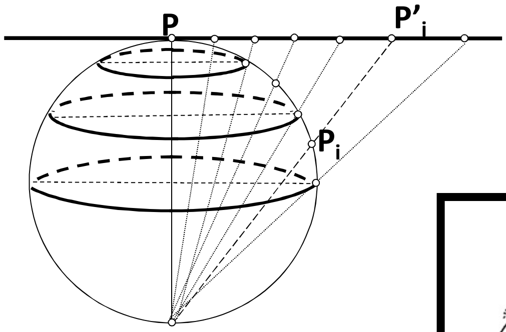
France_II
Projection: Lambert_Conformal_Conic
False_Easting: 600000.000000
False_Northing: 2200000.000000
Central_Meridian: 0.000000
Standard_Parallel_1: 52.000000
Scale_Factor: 0.999877
Latitude_Of_Origin: 52.000000
Esempio di proiezione di Lambert: la Francia.

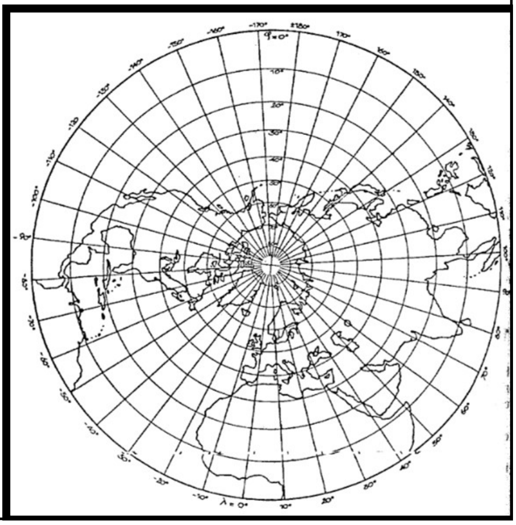
France_III
Projection: Lambert_Conformal_Conic
False_Easting: 600000.000000
False_Northing: 3200000.000000
Central_Meridian: 0.000000
Standard_Parallel_1: 49.000000
Scale_Factor: 0.999877
Latitude_Of_Origin: 49.000000

France_IV
Projection: Lambert_Conformal_Conic
False_Easting: 234.358000
False_Northing: 185861.369000
Central_Meridian: 0.000000
Standard_Parallel_1: 46.850000
Scale_Factor: 0.999945
Latitude_Of_Origin: 46.850000

Corse Projection: Lambert_Conformal_Conic
False_Easting: 234.358000
False_Northing: 185861.369000
Central_Meridian: 0.000000
Standard_Parallel_1: 46.850000
Scale_Factor: 0.999945
Latitude_Of_Origin: 46.850000

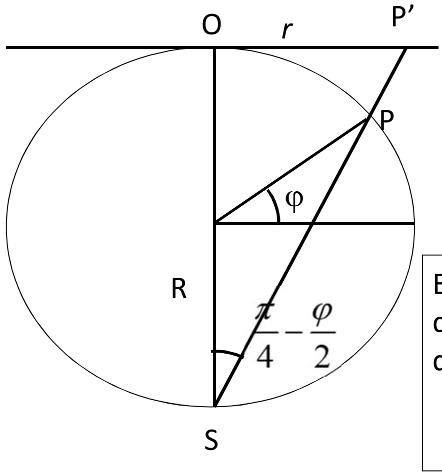
STEREOGRAFICA POLARE





PROIEZIONE CENTRALE CONFORME (come Lambert con angolo di apertura del cono pari a $\pi/2$)

Equazioni della proiezione



$$OP' = r = 2R\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$x = 2R\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\lambda$$

$$y = 2R\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\lambda$$

Eliminando λ si ottiene l'equazione di una circonferenza (trasformate dei paralleli).

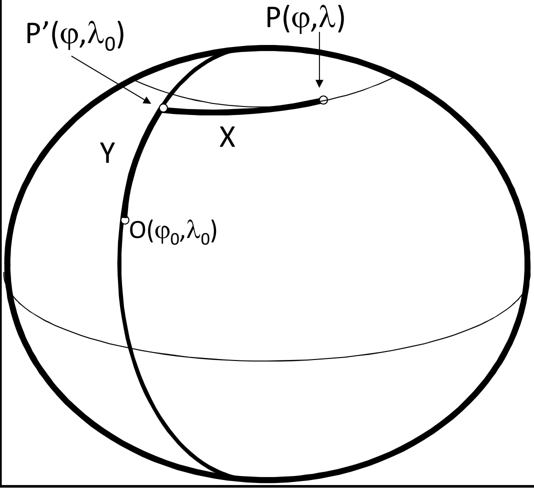
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2R\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

Eliminando φ si ottiene l'equazione di una retta (trasformate dei meridiani).

$$y = x\tan\lambda$$

Rappresentazione di Cassini-Soldner

E' una rappresentazione analitica ricavata dalla cilindrica inversa; usata per gli stati con sviluppo prevalente NORD-SUD.
Considerato un punto O come origine, le coordinate del punto P nella rappresentazione di Cassini-Soldner coincidono con le coordinate geodetiche rettangolari di P rispetto ad O, cioè:

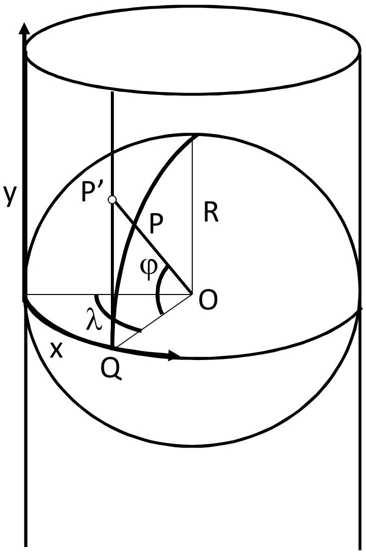


X = PP' è la distanza del punto P dal meridiano origine, misurata sull'arco di geodetica perpendicolare al meridiano;

Y = OP' è la distanza misurata sull'arco di meridiano fondamentale

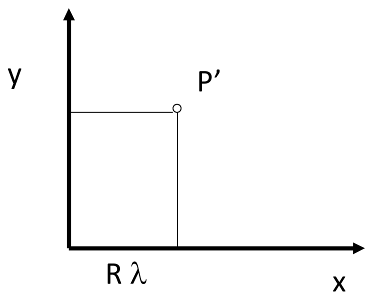
Equazioni carta:
E=X N=Y
Proprietà->Afilattica

Proiezione Cilindrica



$$x = R\lambda$$

$$y = R\tan\varphi$$



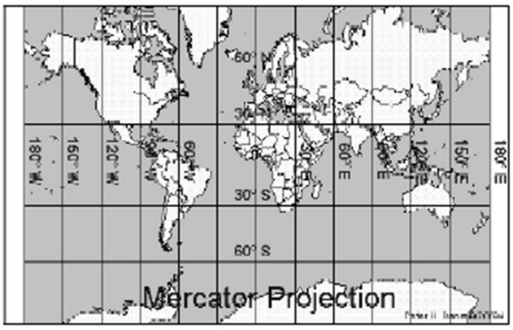
Afilattica

Carta di Mercatore

La carta di Mercatore è derivata dalla precedente in modo tale da renderla conforme. Le equazioni della carta sono:

$$x = R\lambda$$

$$y = R \log \left[\left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{1/2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = Ru$$

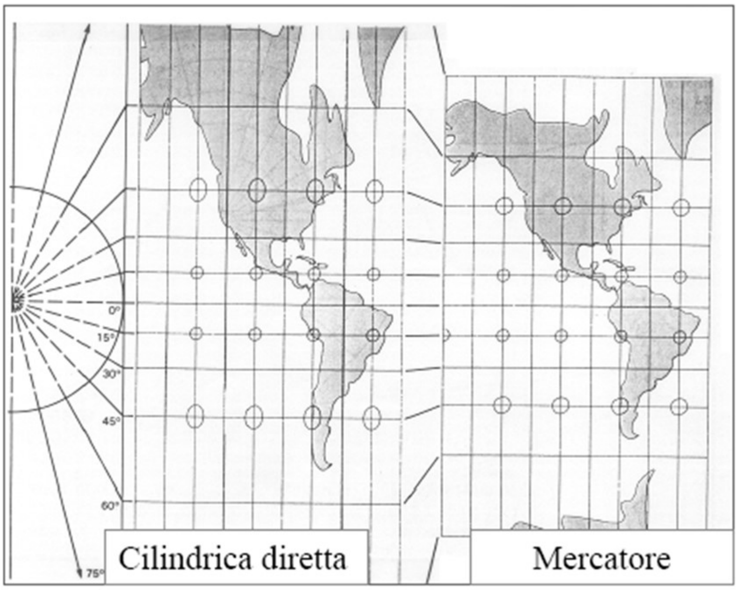


u = Latitudine ridotta

φ	*m*
0°	*1.00*
10°	*1.01*
20°	*1.06*
40°	*1.30*
60°	*1.99*
80°	*5.74*

- *Per $\varphi = 0°$, m = 1, il che conferma che nella carta di Mercatore l'equatore è una linea standard*

Confronto tra cilindrica diretta e carta di Mercatore



IMPOSTAZIONE DEI CALCOLI SUL PIANO DI GAUSS

Mappa di Gauss (1820)

$$x = \lambda N \cos\varphi + \frac{1}{6}\lambda^3 N \cos^3\varphi \left(1 - tg^2\varphi + \frac{N-\rho}{\rho}\right) +$$

$$+ \frac{1}{120}\lambda^5 N \cos^5\varphi \left[5 - 18\, tg^2\varphi + tg^4\varphi + 14\frac{N-\rho}{\rho} - 58\left(\frac{N-\rho}{\rho}\right)^2 tg^2\varphi\right] + \dots\dots$$

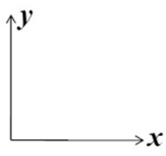
$$y = \int_0^{\varphi} \rho\, d\varphi + \frac{1}{2}\lambda^2 N \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{24}\lambda^4 N \sin\varphi \cos^3\varphi \left[5 - tg^2\varphi + 9\frac{N-\rho}{\rho} + 4\left(\frac{N-\rho}{\rho}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{720}\lambda^6 N \sin\varphi \cos^5\varphi \left[61 - 58\, tg^2\varphi + tg^4\varphi + 270\frac{N-\rho}{\rho} - 330\frac{N-\rho}{\rho} tg^2\varphi\right] + \dots\dots$$

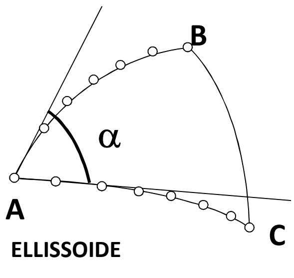
dove N e ρ sono i raggi principali di curvatura dell'ellissoide:

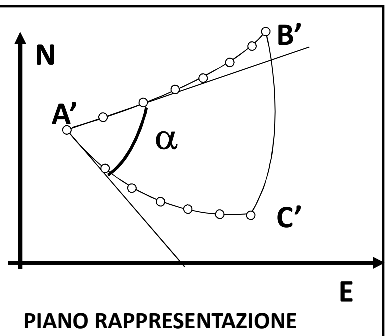
$$R_N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)}} = N$$

$$R_M(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}} = \rho$$



ANGOLI AZIMUTALI





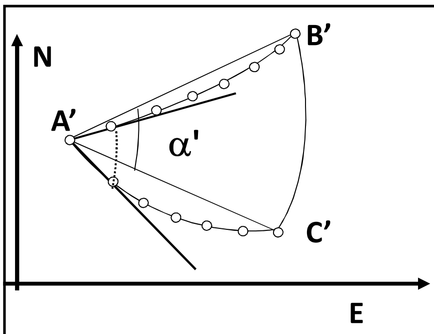
SI CHIAMA TRASFORMATA DI UN ARCO (di ellissoide)
LA LINEA CHE SI OTTEREBBE APPLICANDO LE FORMULE f E g AGLI INFINITI PUNTI DELL'ARCO

CONDIZIONE DI GAUSS

α fra le tangenti alle direzioni uscenti sull'ellissoide

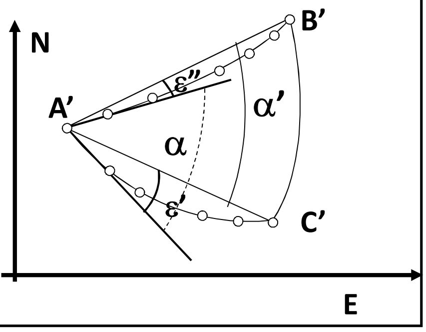
=

α fra le tangenti alle trasformate



QUANDO INSERIAMO UN ANGOLO NELLA CARTA , NOI NON LO INSERIAMO COME
$\alpha =$ ANGOLO FRA LE TANGENTI ALLE TRASFORMATE

MA COME α'= ANGOLO FRA LE CORDE



COSI' COMMETTIAMO 2 ERRORI ε' ed ε''

ε' ed ε'' si chiamano riduzioni angolari alla corda e si calcolano in funzione delle coordinate cartografiche di A', B', C'

$$\varepsilon' = \varepsilon_{A'C'} = (1/\ 6\ \rho N)\ (N_{A'} - N_{C'})\ \ (2\ E_{A'} + E_{C'})$$

dove ρ e N si chiamano raggi principali di curvatura e valgono:

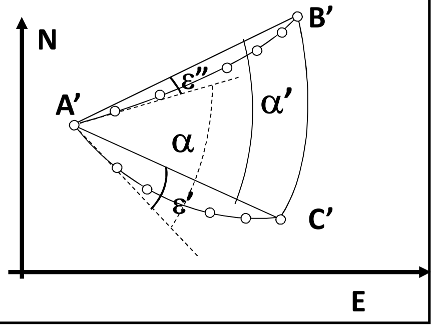
$$\rho = a\ (1-e^2)\ /\ (d)^{3/2}$$

$$d = 1 - e^2\ sen^2\varphi_m$$

$$N = a\ /\ (d)^{1/2}$$

$$\alpha' = \alpha - \varepsilon' + \varepsilon''$$

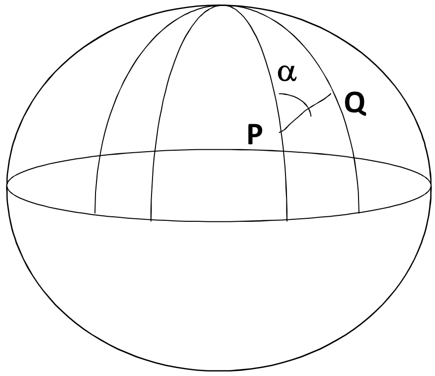
$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{E_{C'} - E_{A'}}{N_{C'} - N_{A'}} - \operatorname{arctg} \frac{E_{B'} - E_{A'}}{N_{B'} - N_{A'}}$$



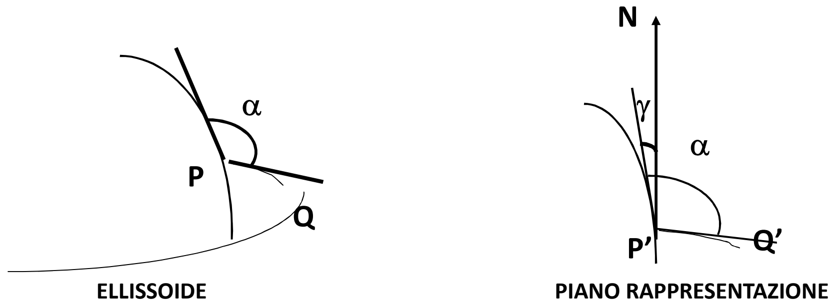
I valori ε' ε'' sono rilevanti quando si voglia utilizzare una carta per progettare opere ingegneristiche, come strade, gallerie, ferrovie,.., dove le distanze tra i punti è dell'ordine di qualche decina di chilometri

AZIMUTH

AZIMUTH α = angolo tra il meridiano per P e la direzione PQ



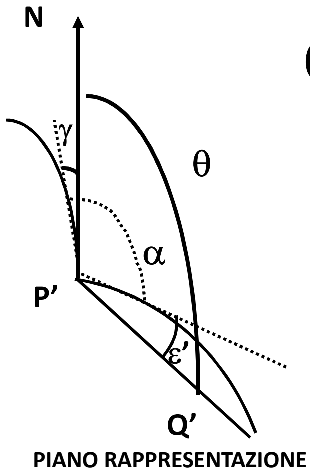
ELLISSOIDE



Convergenza del meridiano γ = angolo tra la tangente alla trasformata del meridiano per P e l’asse N

$$\gamma = \lambda \, \text{sen}\varphi \, [1+1/3 \, \lambda^2 \cos^2 \varphi \, (1+3\eta^2)]$$

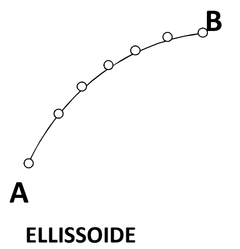
$$\eta^2 = (N-\rho)/\rho$$

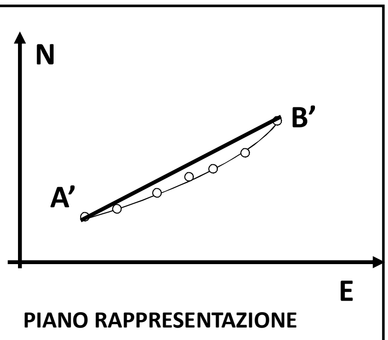


$$\theta = \alpha - \gamma + \varepsilon'$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{E_{Q'} - E_{P'}}{N_{Q'} - N_{P'}}$$

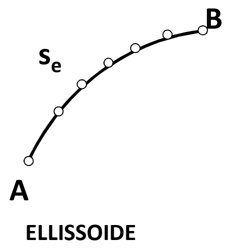
DISTANZA

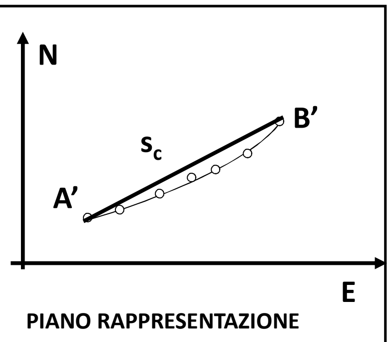




La trasformata di AB può essere confusa con la corda A'B' per distanze fino a 100 km

$(s_t - s_c)/ s_t \cong 10^{-8}$





Per passare da s_e a s_c devo applicare il modulo di deformazione per archi finiti

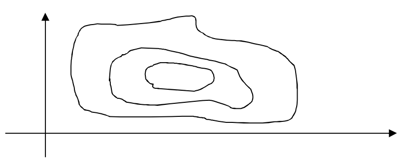
$s_c = m_{A'B'}\, s_e$

dove

$$m_{A'B'} = 1 + \frac{x^2_{B'} + x_{A'}\, x_{B'} + x^2_{A'}}{6\, \rho_m N_m}$$

ALTIMETRIA

- **determinazione delle quote, cioè delle distanze dal GEOIDE**
- **scrittura delle quote vicino ai particolari planimetrici corrispondenti**
- **collegamento di tutti i punti a ugual quota *curve di livello***



Classificazione delle carte – funzione del contenuto

- ***Se è fondamentale la corretta rappresentazione delle posizioni dei punti**, cioè è preponderante l'importanza delle informazioni di tipo metrico (coordinate di punti in un sistema di riferimento prescelto) → **CARTE GENERALI o di BASE***

- ***Se è fondamentale la rappresentazione di tematismi**, cioè è preponderante l'importanza delle informazioni specifiche relative al "tema" di interesse (es. copertura del suolo, idrologia, meteorologia, ecc.) → **CARTE TEMATICHE***

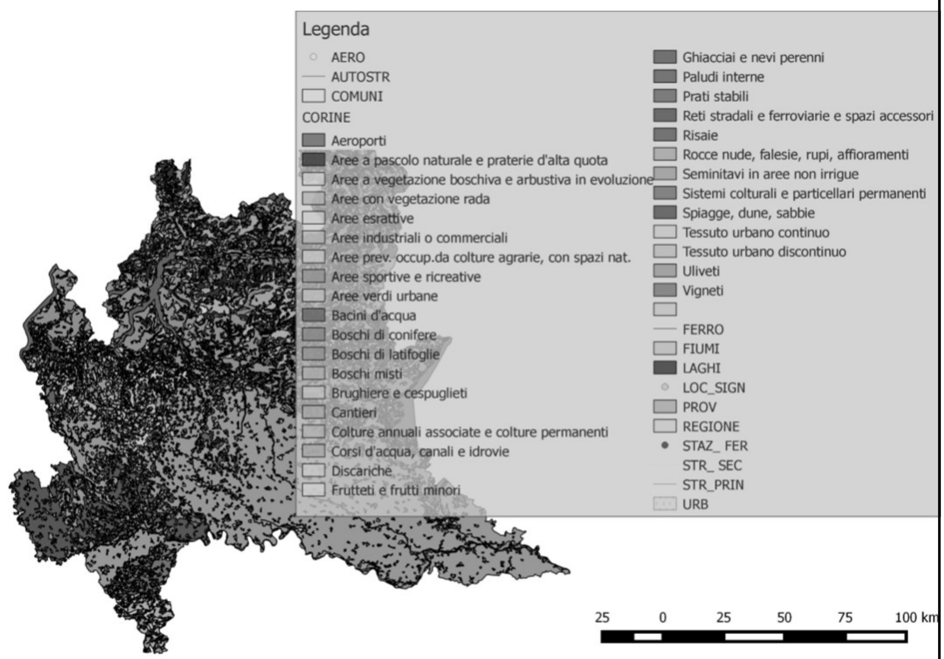
Carte di base

Forniscono informazioni di tipo metrico e descrittivo della superficie fisica della terra.

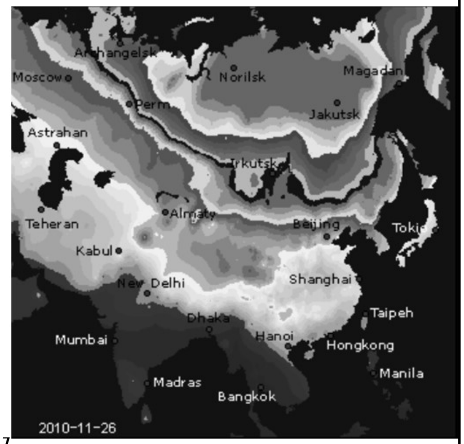
Mostrano la posizione di molti tipi di configurazioni geografiche (corsi d'acqua, linee di costa, strade, ecc.) e di strutture artificiali (edifici, infrastrutture, ecc.).

Carte tematiche

- Sono carte che rappresentano uno più tematismi di interesse. Solitamente i tematismi sono riportati su una carta di base.
- Esempi risorse minerarie, attività economiche, uso del suolo, clima…



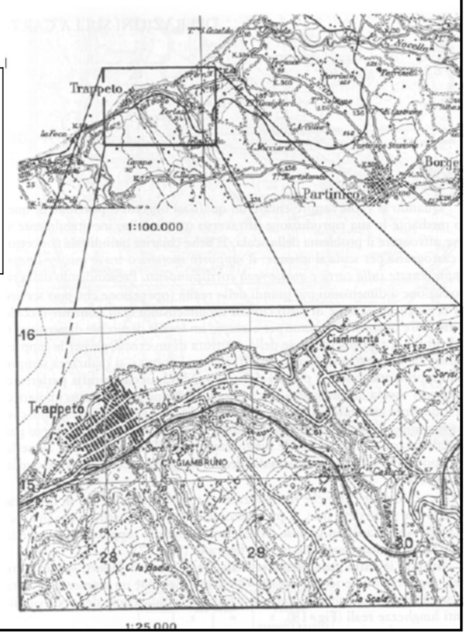
Carte Tematiche



Esempio di carta tematica
Carta della temperatura massima [°C]
in Asia (ven. 26/11/2010) www.woitalia.it

Concetto di scala della rappresentazione cartografica

1:100000	piccola scala
1:10000	↓
1:1000	↓
1:100	grande scala



Rappresentazioni a due scale diverse della medesima area: si deve notare la differenza di particolari visibili alle diverse scale di rappresentazione.

Scala nominale

• Per definizione è la scala di riduzione che viene applicata alla superficie di riferimento.

• E' dato da una frazione con il numeratore uguale a 1.

• Rappresenta il rapporto fra la lunghezza di un segmento sulla superficie di riferimento e il corrispondente segmento sulla superficie terrestre.

• Nella trasformazione da superficie di riferimento a piano cartografico non si conserva costante su tutta la superficie della carta, ma ha esattamente il valore della scala nominale solo lungo le linee (o nei punti) di tangenza fra superficie di riferimento e piano cartografico (o superficie sviluppabile).

Fattore di scala

• E' il rapporto (valutato in un punto) fra la scala effettiva della carta in quel punto e la scala nominale.

Il concetto di scala è importante perché ad esso è legato quello di deformazioni della carta; infatti queste occorre siano inferiori all'errore di graficismo (corrispondente a 0.2 mm sul foglio del disegno).
Riportiamo una tabella contenente l'errore di graficismo corrispondente alla scala della carta. Tale valore corrisponde alla precisione planimetrica della carta.

Scala carta	Deformazione media
1 : 500	10 cm = 0.2 mm*500
1: 1000	20 cm
1: 2000	40 cm
1: 5000	1 m
1: 10000	2 m
1: 25000	5 m
1: 50000	10 m
1: 100000	20 m
1: 1000000	200 m

La tolleranza della carta (l'errore massimo) è, per convenzione, il doppio dell'errore di graficismo.