GEODESIA 2

PARTIAMO DALL'IPOTESI DI ESEGUIRE MISURE DIRETTAMENTE SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO: L'ELLISSOIDE

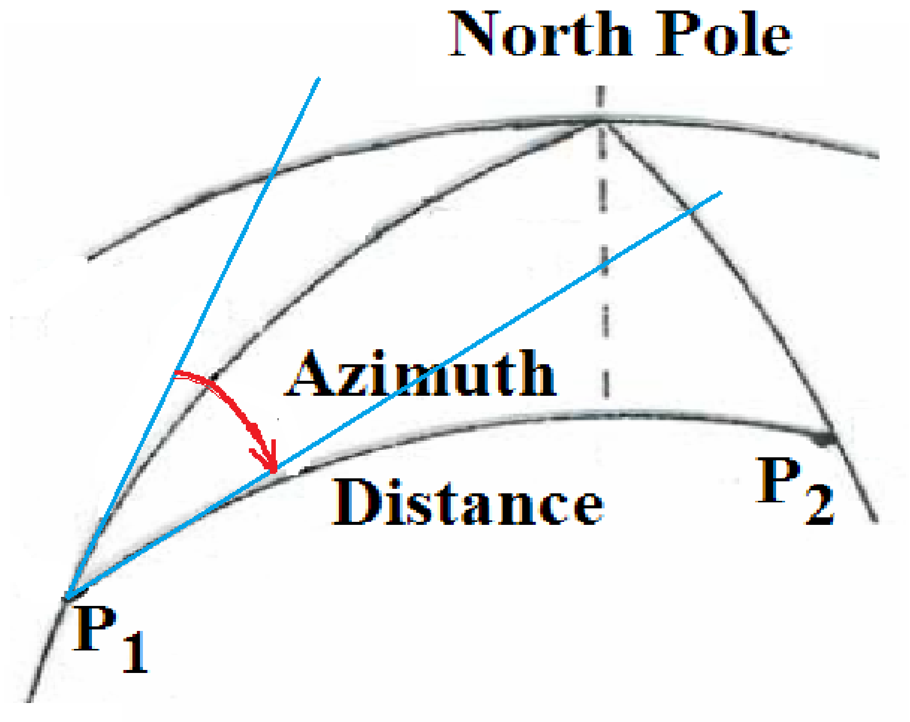
si dimostra che la linea di minor lunghezza che congiunge due punti sull'ellissoide è la geodetica: curva "gobba" la cui normale coincide con la normale alla superficie

(una curva nello spazio che non è contenuta in un piano

è detta 'gobba')

PRIMO PROBLEMA: le misure di angoli e distanze dovrebbero essere eseguite lungo geodetiche, tuttavia per questioni di praticità le misure, in realtà, sono eseguite lungo sezioni normali.

azimuth: angolo che si forma tra le tangenti alle due geodetiche uscenti da un punto.



Dalla definizione di geodetica si ricava la relazione di Clairaut

Sulle superfici di rotazione è costante per ogni punto di una geodetica il prodotto tra il raggio del parallelo per il seno dell'azimut della geodetica.

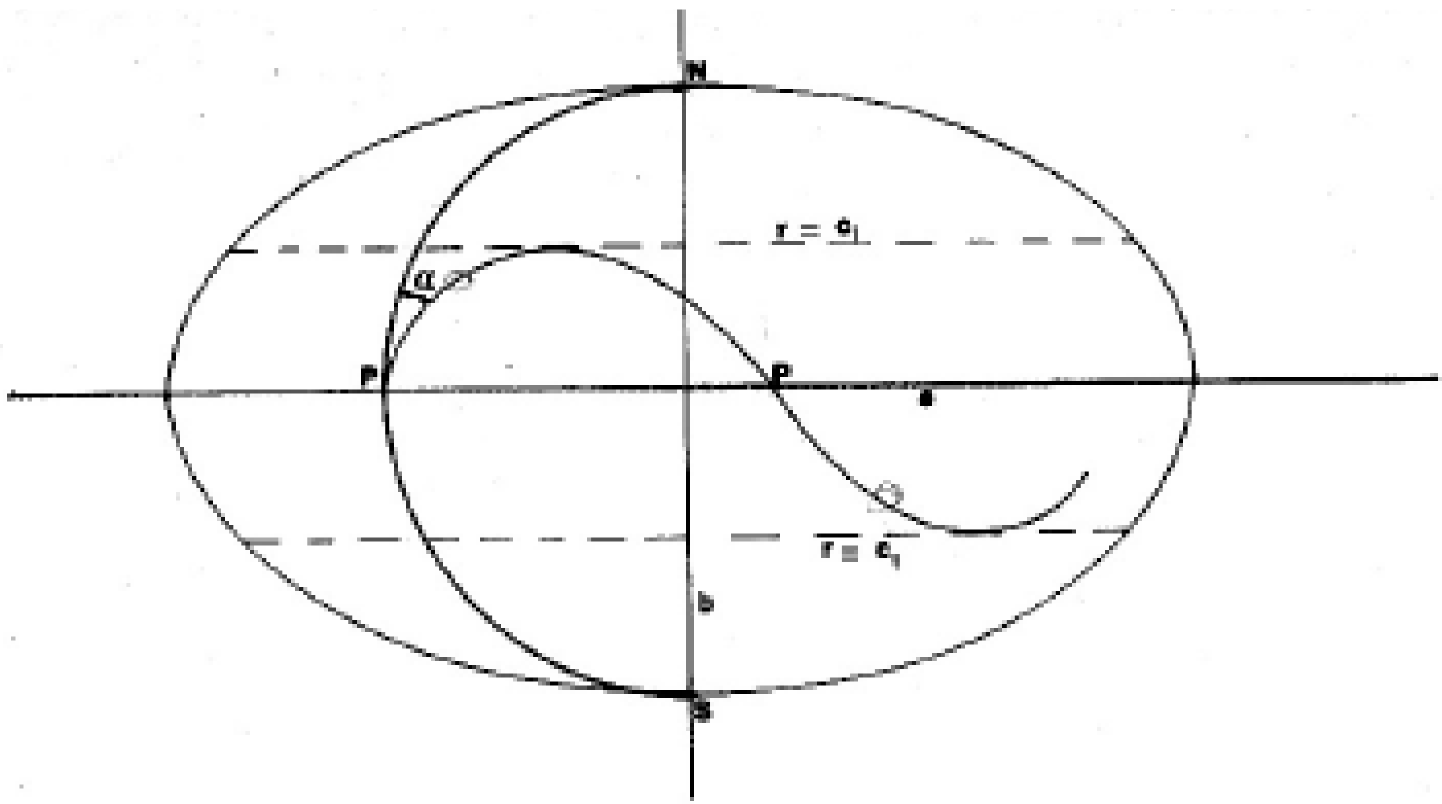
$$r\ \mathrm{sen}\alpha = \text{costante}$$

La relazione è ricavata imponendo che la normale alla geodetica sia uguale alla normale all'ellissoide in tutti i punti della geodetica.

Piano → rette
Sfera → archi di cerchio massimo
Cilindro → eliche
Ellissoide → curve gobbe (tranne che sui meridiani)

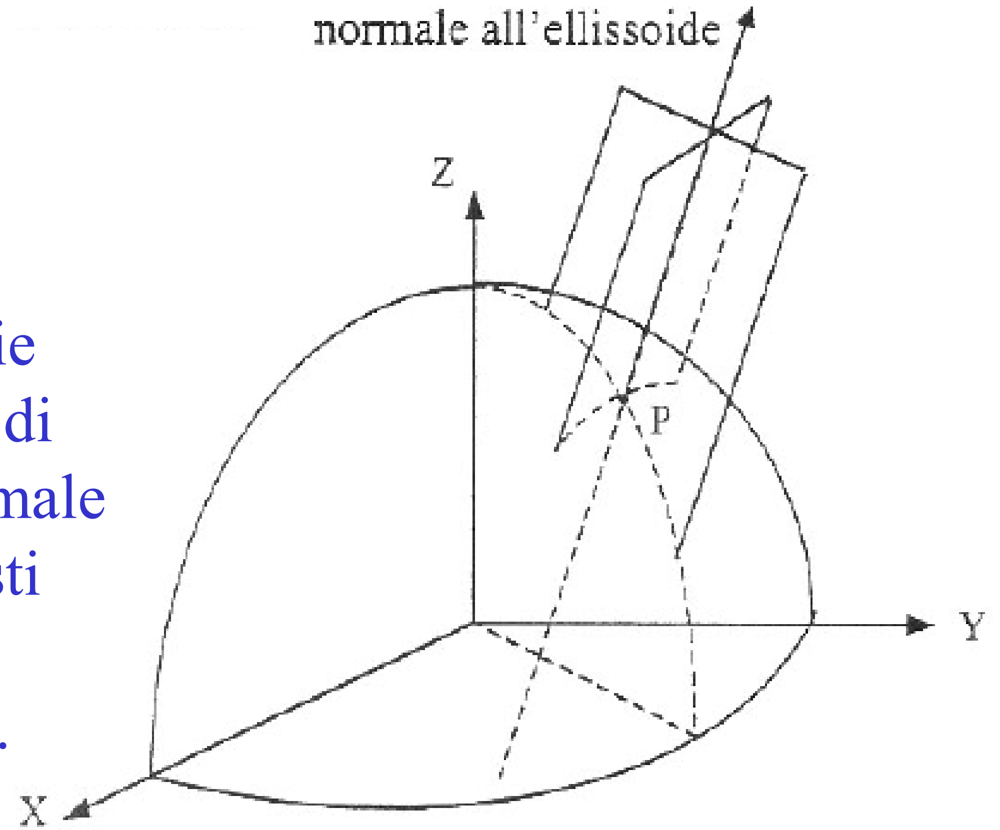
Geodetiche

La curva in figura rappresenta l'andamento di una geodetica uscente dal punto P con azimuth α.



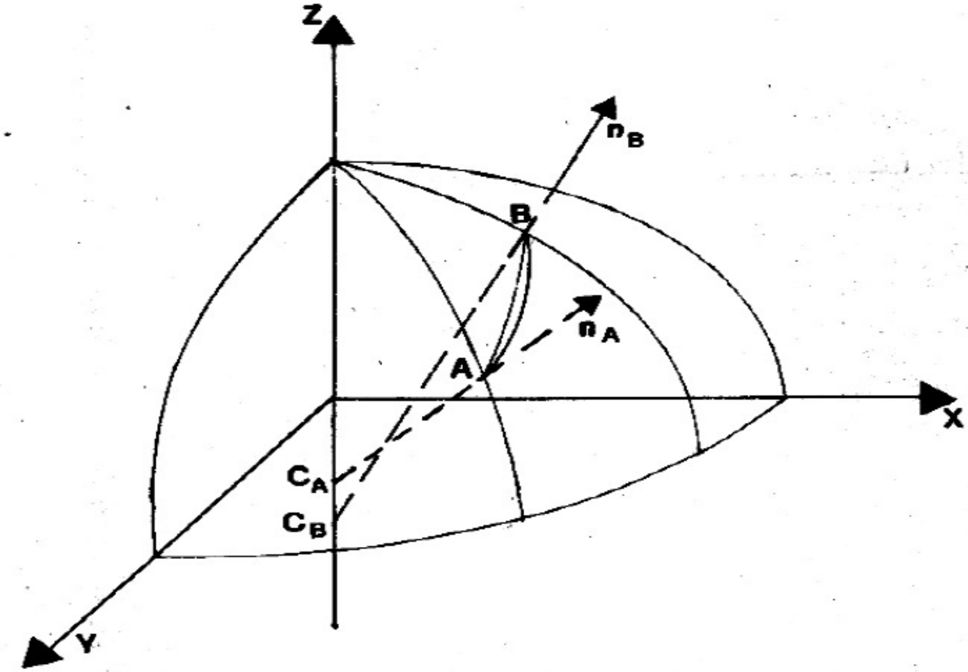
Sezioni normali

Dato un punto P sulla superficie ellissoidica, si prenda il fascio di piani che ha per costola la normale nel punto P. Le tracce che questi piani lasciano sulla superficie sono chiamate sezioni normali.



Se al posto della normale si prende una qualsiasi direzione si ottengono le sezioni oblique

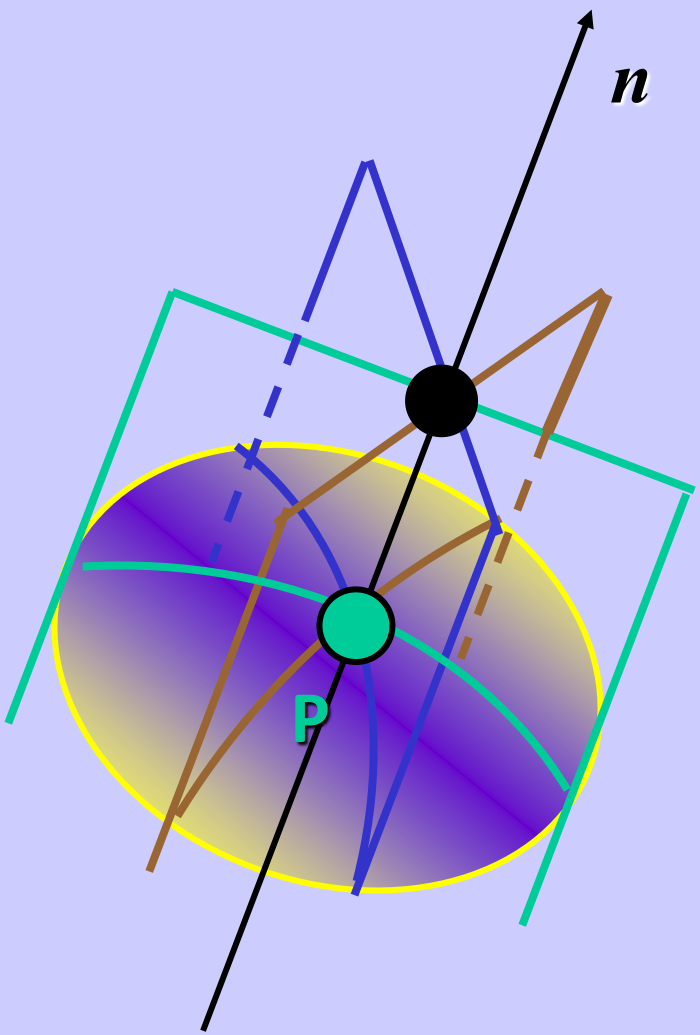
In figura sono riportate le due sezioni normali principali: il **primo verticale** e la curva ortogonale ad esso ovvero il **meridiano** passante per P.

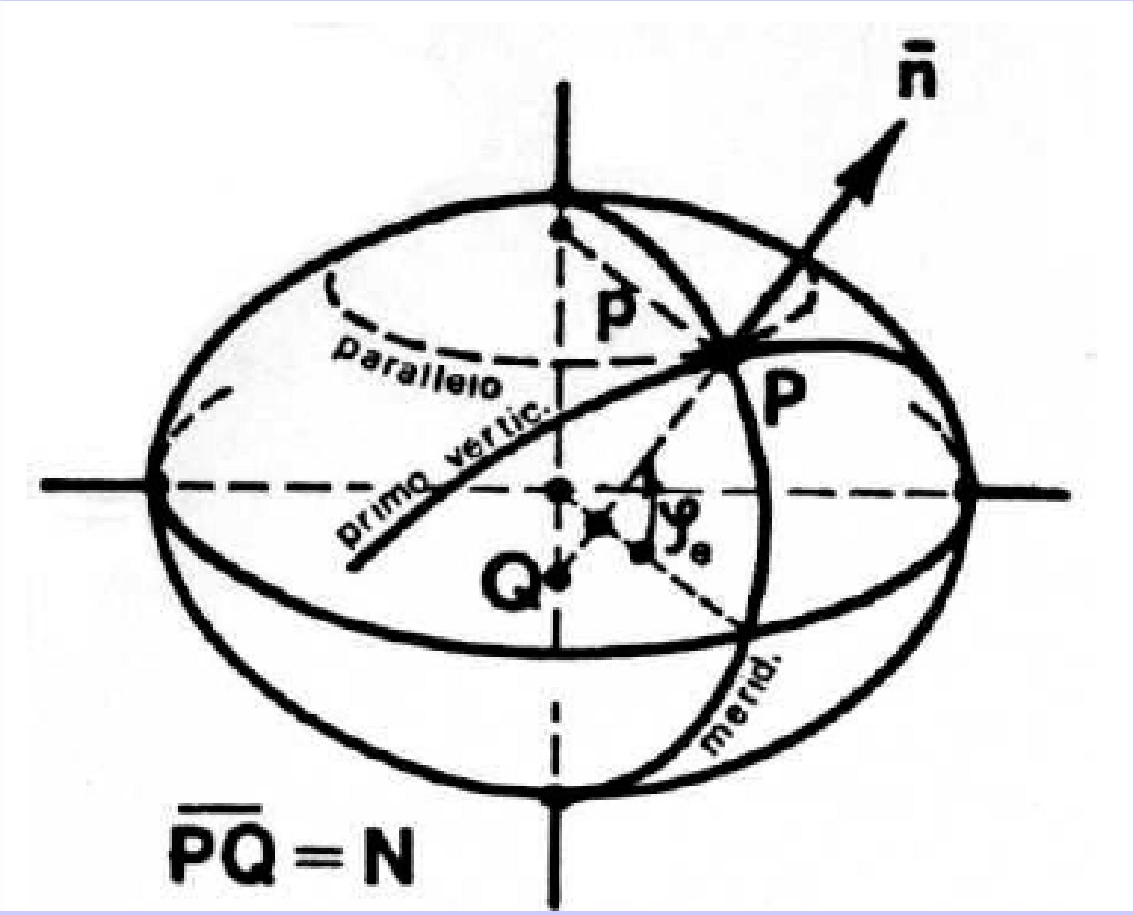


Sezioni normali

Tra due punti A e B sull’ellissoide esistono due distinte sezioni normali Lab e Lba dette reciproche.

Tutti i piani che hanno per costola *n* tagliano la superficie secondo SEZIONI NORMALI

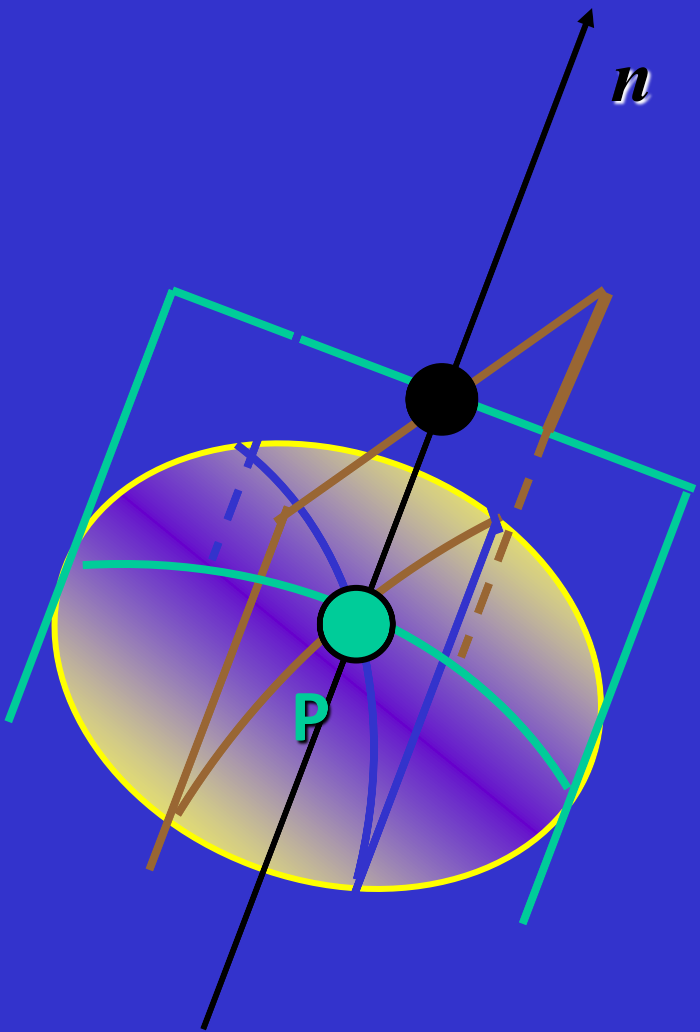




In un punto di una generica sezione normale possiamo associare il raggio di curvatura (raggio della circonferenza che approssima meglio la curva nel punto).

Le due sezioni normali principali, meridiano e primo verticale, hanno rispettivamente <u>raggio di curvatura</u> minimo **ρ** (raggio del meridiano) e massimo **N** (gran normale)

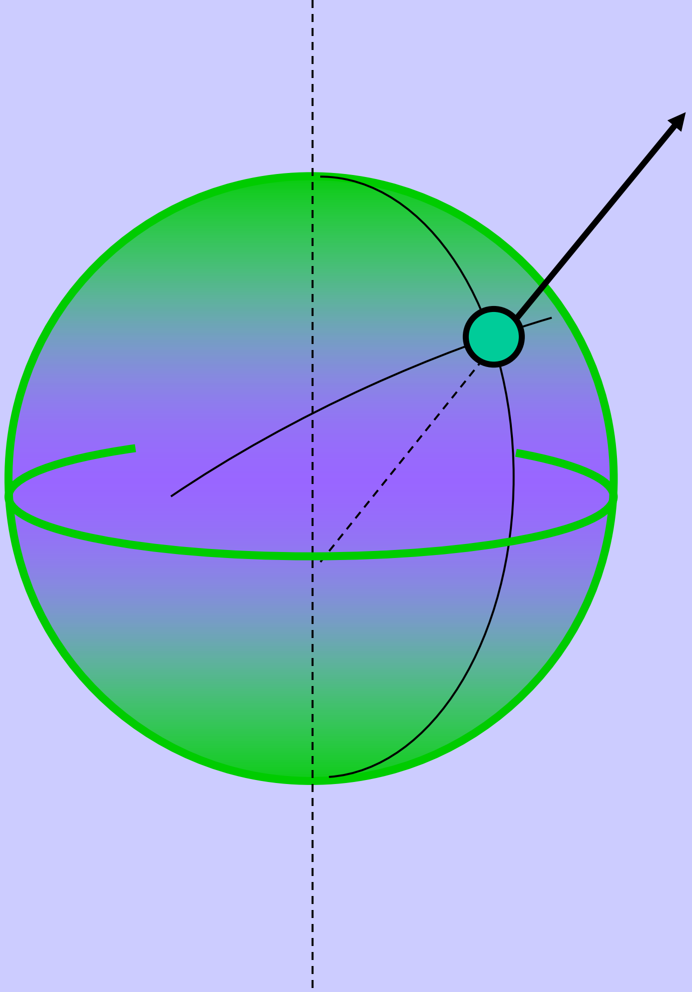
Tutti i piani per n tagliano la superficie secondo SEZIONI NORMALI la cui curvatura varia



$\frac{1}{r}$ → curvatura

$\frac{1}{\rho}$ → curvatura massima

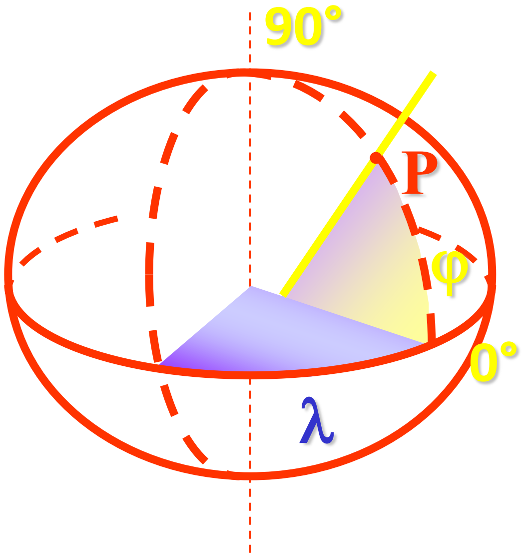
$\frac{1}{N}$ → curvatura minima



SFERA LOCALE

$$R = \sqrt{\rho N}$$

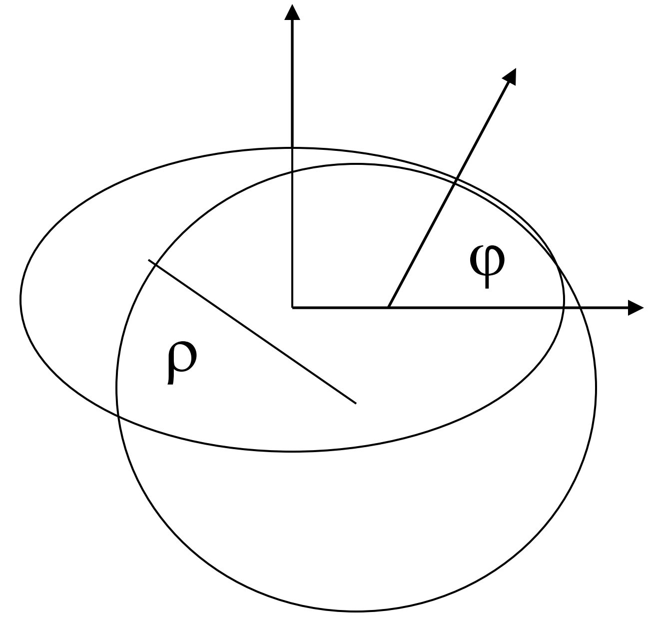
ρ è il raggio minimo
N è il raggio massimo



$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$



$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$R_{\varphi=90^\circ} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = 6399.94km$$

$$R_{\varphi=0^\circ} = a\sqrt{1-e^2} = 6356.91km$$

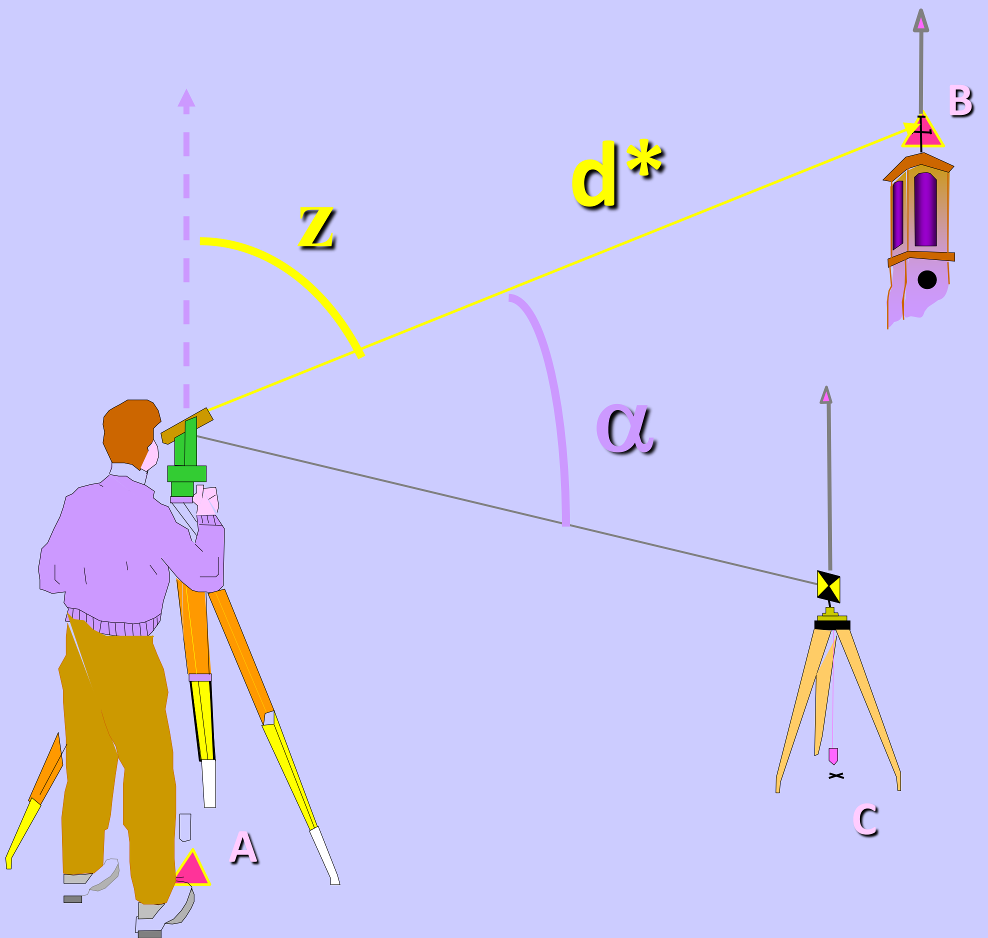
QUI

Poiché si dimostra che gli errori indotti nelle misure nel passare dalla geodetica alla sezione normale sono sempre inferiori agli errori di misura, vale il seguente teorema:

TEOREMA DELLA GEODESIA OPERATIVA: QUALUNQUE MISURA DI AZIMUTH, ANGOLO O DISTANZA PUO' RITENERSI ESEGUITA CON RIFERIMENTO AD ARCHI DI GEODETICA SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

IL TOPOGRAFO ESEGUE MISURE DI ANGOLI E DISTANZE SULLA SUPERFICIE TERRESTRE

COME SI OTTENGONO LE CORRISPONDENTI QUANTITA' SULLA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO?



Come riportare le misure effettuate sulla superficie terrestre alla superficie di riferimento?

Distanza tra due punti

Siano A e B due punti sulla superficie fisica, gli strumenti e i metodi di misura impiegati permettono di definire la lunghezza l dell'arco di sezione normale che congiunge le proiezioni A_0B_0 l è la traccia del piano che contiene la verticale per A_0 e il punto B_0

Azimut di un punto

Siano A e B due punti sulla superficie fisica, l'azimut di B rispetto ad A, misurabile con osservazioni astronomiche o teodoliti giroscopici, è l'angolo che la sezione normale A_0B_0 forma con la tangente al meridiano, in A_0 diretta verso nord; l'azimut si misura in senso orario a partire dalla direzione del nord.

Angolo azimutale

Siano A e B due punti sulla superficie fisica ed O un terzo punto; l'angolo AOB che si può misurare con un teodolite è l'angolo fra le sezioni normali O_0A_0 e O_0B_0.

O_0A_0 Verticale passante per O e punto A

O_0B_0 Verticale passante per O e punto B

Angolo zenitale

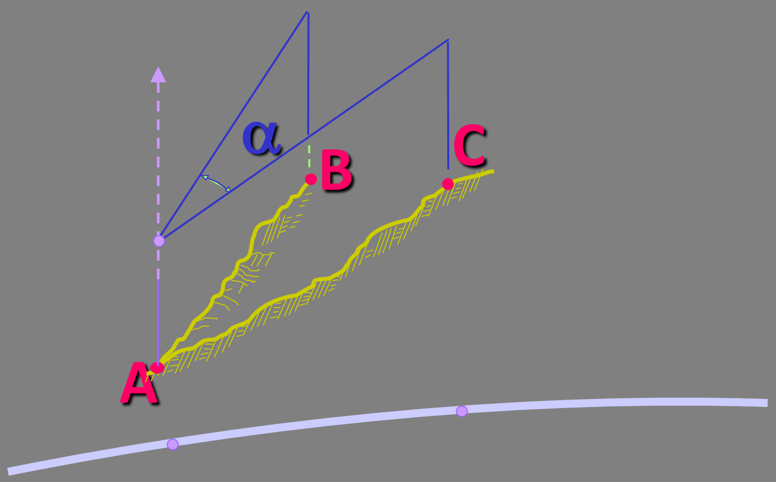
Siano A e B due punti sulla superficie fisica, l’angolo zenitale Z_{AB}, misurabile con un teodolite se B è visibile da A, è l’angolo che la congiungente AB forma con la verticale in A.

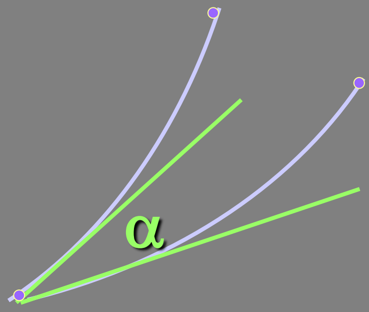
Dislivello

Siano A e B due punti sulla superficie fisica il dislivello tra i punti A e B, misurabile con teodolite o livello, è la differenza tra la quota Q_A e la quota Q_B.

LE MISURE DEGLI ANGOLI SONO ESEGUITE SUL TERRENO

TERRENO → ELLISSOIDE

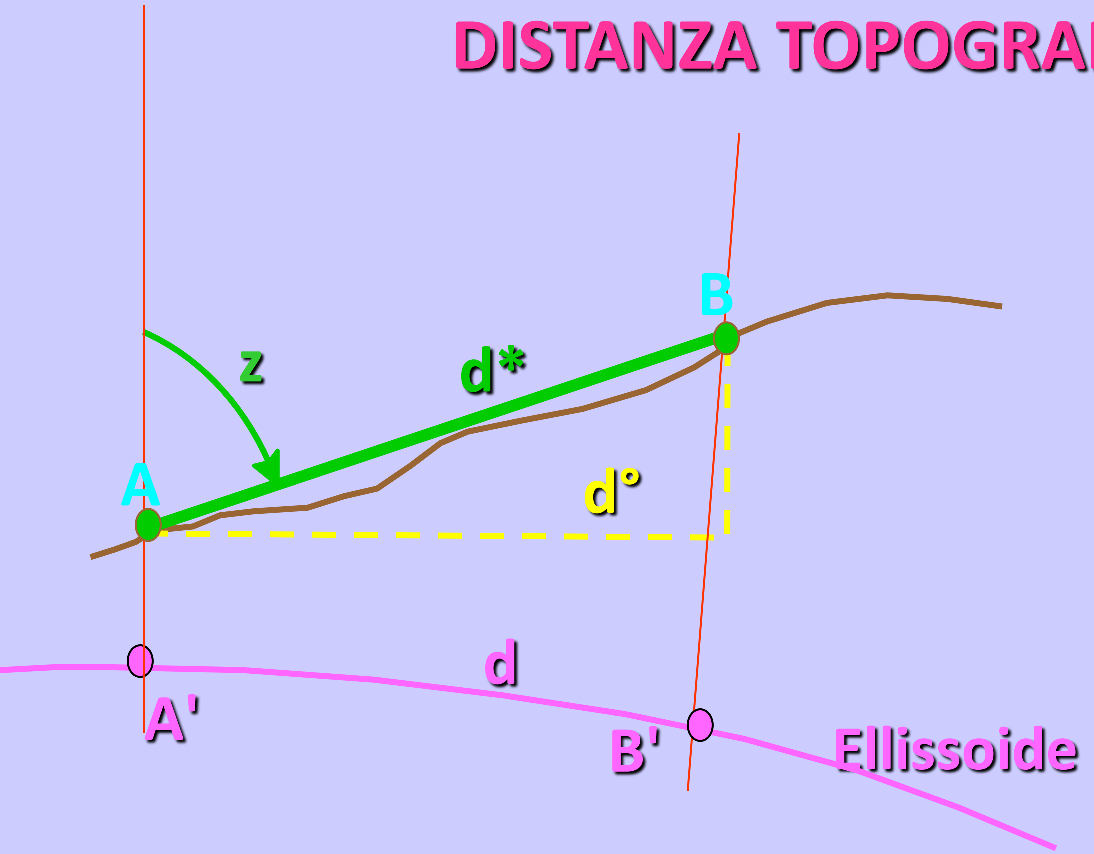




CONSIDERARE BAC= α COMPORTA ERRORI INFERIORI AGLI ERRORI DI MISURA PER CUI

BAC realtà → α ellissoide

DISTANZA TOPOGRAFICA



SI CHIAMA DISTANZA TOPOGRAFICA TRA 2 PUNTI A E B L'ARCO DI ELLISSOIDE d CHE CONGIUNGE A' E B', PROIEZIONI DI A E B SULL'ELLISSOIDE

La distanza che si misura è d*

La distanza ridotta all'orizzontale è $d^0 = d^* \text{sen } z$

La distanza topografica è d

Quella che misuro è la distanza reale

d*

Quella che mi serve è la distanza topografica

d

Come la posso calcolare ?

SI MISURANO d^* E z.
MA COME SI DETERMINA LA DISTANZA TOPOGRAFICA ?

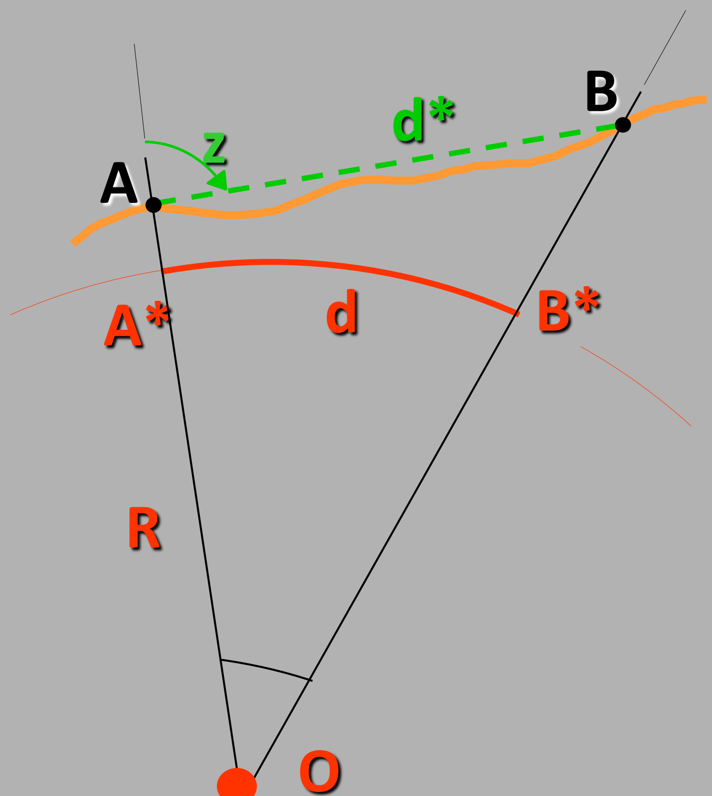
SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA:
IL TOPOGRAFO OPERA IN CAMPI LIMITATI

PER ZONE CIRCOLARI DI RAGGIO< 100 KM INTORNO AL PUNTO P LA PORZIONE DI ELLISSOIDE ≈ PORZIONE DI UNA SFERA, LA SFERA LOCALE

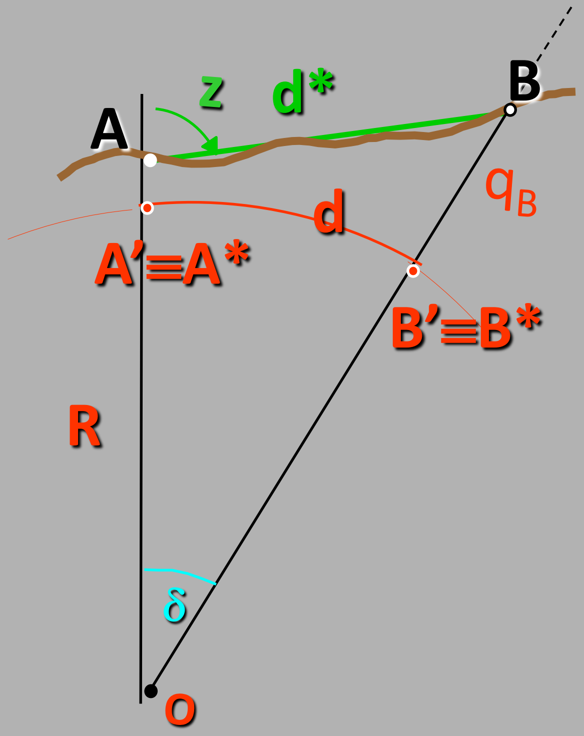
SFERA LOCALE = SFERA DI RAGGIO $R= \sqrt{\rho N}$

ρ e N sono i raggi principali di curvatura dell'ellissoide in P

Entro un raggio di 100 km posso considerare come superficie di riferimento la sfera locale



La distanza topografica è d

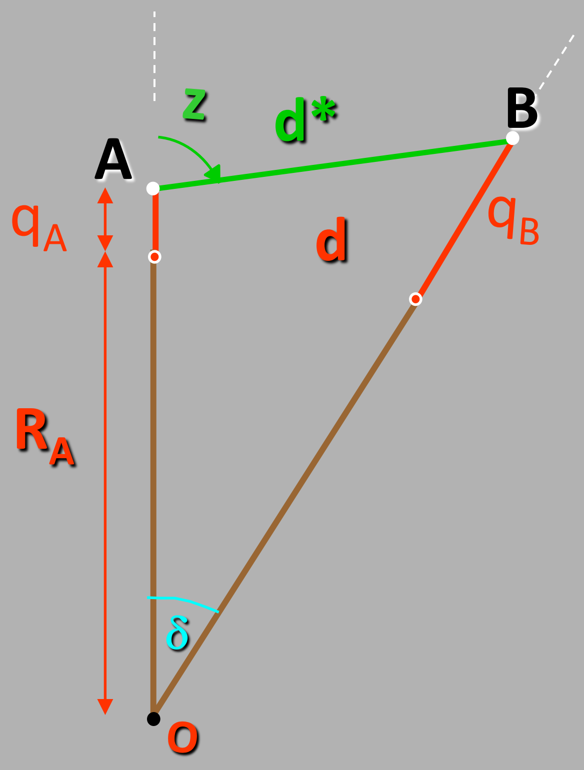


$$d = R \cdot \delta$$

δ ?

Teorema di Carnot

$$OB = \sqrt{d^{*2} + OA^2 - 2\, d^* OA \cos(\pi - z)}$$



TEOREMA DEI SENI

$$\frac{OB}{\mathrm{sen}(\pi - z)} = \frac{d^*}{\mathrm{sen}\,\delta}$$

$$\delta = \arcsin \frac{d^* \mathrm{sen}(\pi - Z)}{OB}$$

$$R_A = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_A}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

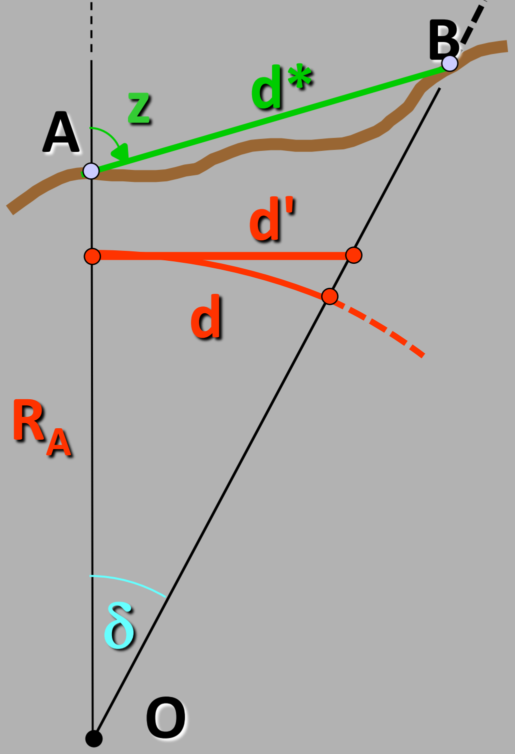
CALCOLARE R E' COMPLESSO

IL CALCOLO DEVE TENER CONTO DI MOLTI DECIMALI

LA FORMULA E' SEMPLICE

$$d = R \cdot \delta$$

NON È PERÒ OPERATIVA



PER CAMPI DI AZIONE DI 5 Km SI UTILIZZA UN ALTRO SCHEMA

DIMOSTRIAMO CHE IN QUESTO CAMPO DI AZIONE LA DISTANZA d PUO' ESSERE SOSTITUITA CON d'

$$d = R\,\delta$$

$$d' = R\,\mathrm{tg}\,\delta$$

sottraggo membro a membro

$$d' - d = R\,(\mathrm{tg}\,\delta - \delta)$$

Mettiamo dei valori

d	**5**	**km**
R	**6300**	**km (valore indicativo)**

$$\delta = \frac{5 \ \text{km}}{6300 \ \text{km}} = 7.9365079365 \ 10^{-4} \ \text{radianti}$$

$$\text{tg}\ \delta = 7.936509602862 \ 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{tg}\ \delta - \delta = -1.67 \ 10^{-10}$$

$$d' - d = R\,(\mathrm{tg}\,\delta - \delta) = 6300\ \mathrm{km}\ 1.67\ \ 10^{-10} = 1.05\ \mathrm{mm}$$

$$\frac{1.05\ \mathrm{mm}}{5\ \ \mathrm{km}} = \ 2.1\ 10^{-7}$$

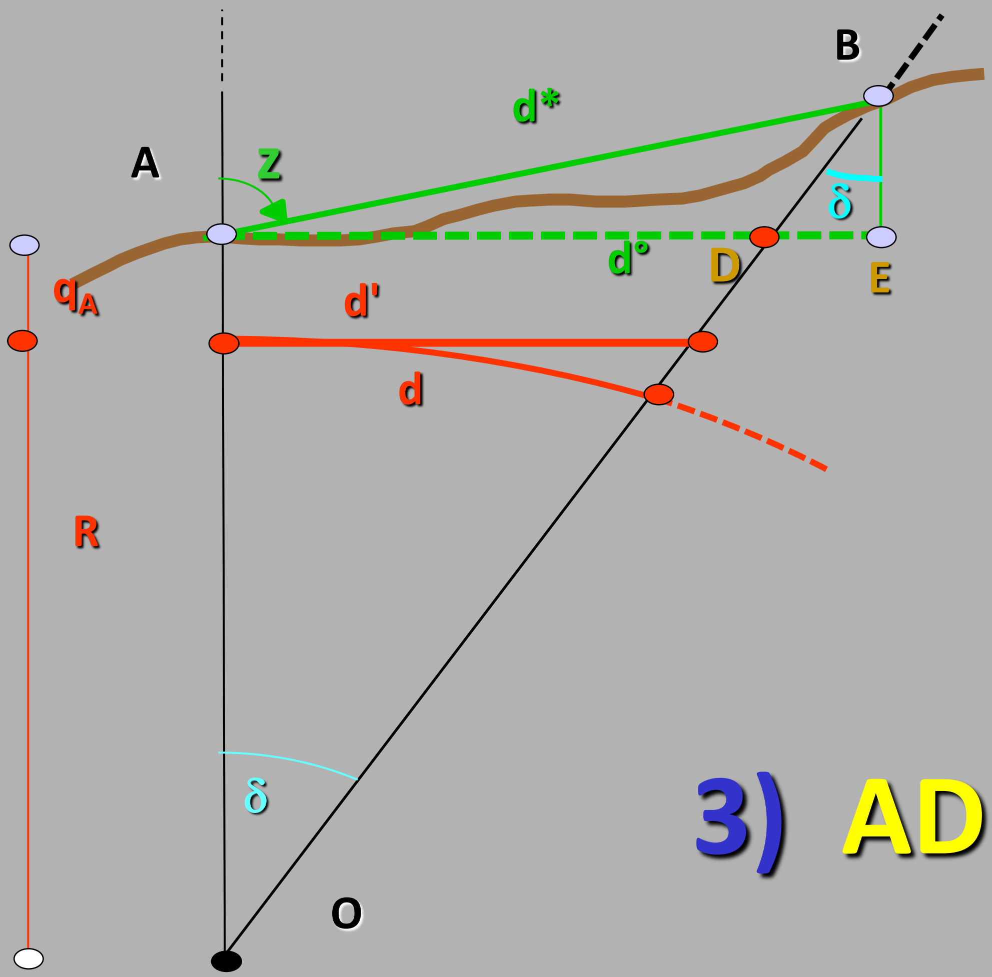
QUANDO SI MISURA UNA DISTANZA DELL'ORDINE DI 5KM SI USANO STRUMENTI LA CUI PRECISIONE E' DELL'ORDINE DI

10^{-5} $\pm$ 1 cm su distanze di 5 km

LA SEMPLIFICAZIONE

d' INVECE DI d
PORTA AD ERRORI INFERIORI DI UN ORDINE DI GRANDEZZA AGLI ERRORI DI MISURA

E' LECITA



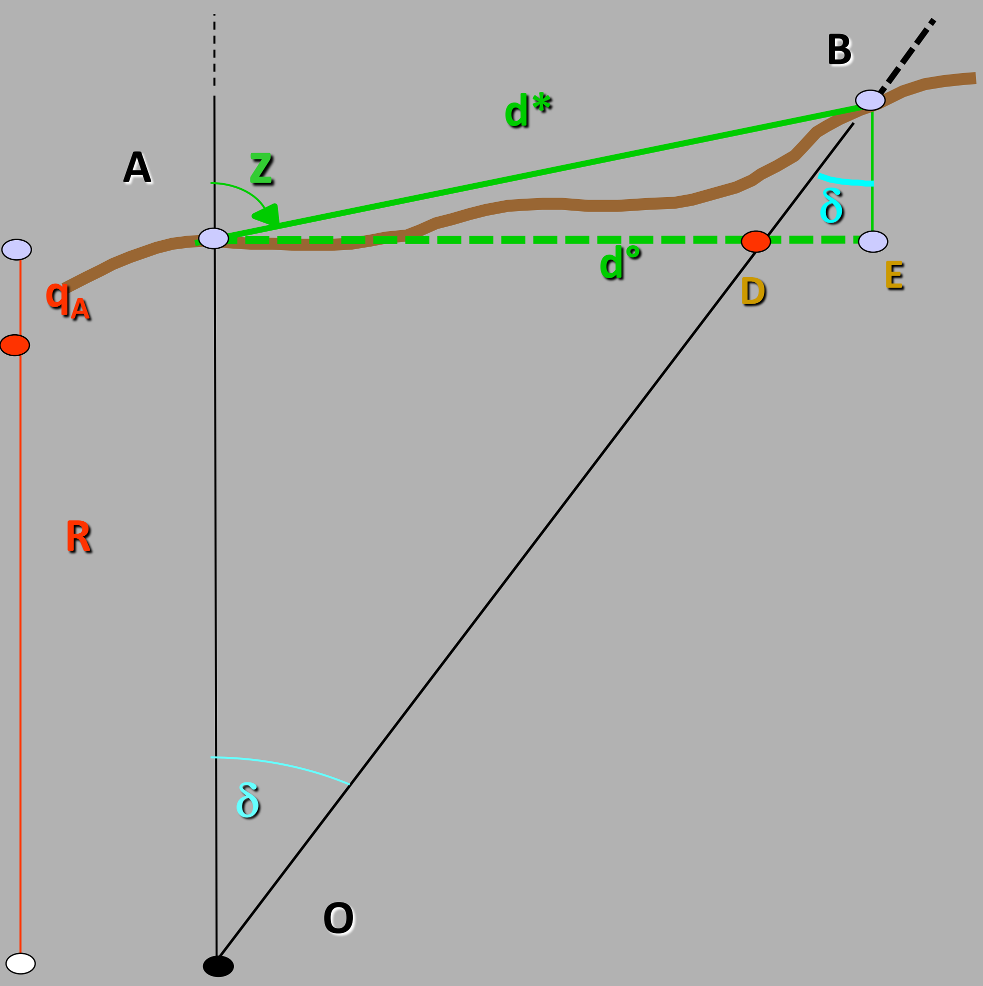
1) $d° = d^* \text{sen } z$

2) $AD = d^* \text{sen } z - DE$

3) $AD : (R + q_A) = d' : R$

$$d' = AD \frac{R}{R + q_A}$$

Calcolo di DE



$$DE = BE\ tg\ \delta$$

$$tg\ \delta = \frac{d° - DE}{R+q_A}$$

$$BE = d^{*} \cos z$$

QUI BC

$$DE = d^{*}\cos z \; \frac{d° - DE}{R+q_A}$$

$$DE + DE \; \frac{d^{*}\cos z}{R+q_A} = d^{*}\cos z \; \frac{d°}{R+q_A}$$

$$DE \; \frac{R+q_A + d^{*}\cos z}{\cancel{R+q_A}} = d^{*}\cos z \; \frac{d°}{\cancel{R+q_A}}$$

$$DE = \frac{d^{*}\cos z\, d^{\circ}}{R + q_A + d^{*}\cos z} \cong \frac{d^{*}\cos z\, d^{\circ}}{R}$$

$$AD = d^{*}\operatorname{sen} z - DE =$$

$$d^{*}\operatorname{sen} z - \frac{d^{*}\cos z\, d^{\circ}}{R}$$

Esempio:

$d^* = 5000m \quad z = 99^g \quad R = 6400km \quad q_A = 500m$

1) $d° = d^* \text{sen } z = 4999.383m$

2) $AD = d^* \text{sen } z - DE$

$$DE = \frac{d^* \cos z \, d°}{R} = 0.061349m$$

$AD = 4999.3216m$

3) $AD:(R+q_A) = d':R$

$$d' = AD \frac{R}{R+q_A}$$

$d' = 4998.931m$

RIASSUNTO: PASSAGGIO DISTANZA REALE

DISTANZA TOPOGRAFICA

AMBITO DI 100 Km

$d = R\delta$

FORMULA RIGOROSA R DEVE ESSERE NOTO CON PRECISIONE

AMBITO DI 5 Km

$d \cong d' = d° - DE$

FORMULA EMPIRICA, SI INTRODUCE L'APPROSSIMAZIONE $d \cong d'$

R ENTRA IN UNA CORREZIONE .

VA BENE ANCHE SE NOTO CON QUALCHE APPROSSIMAZIONE

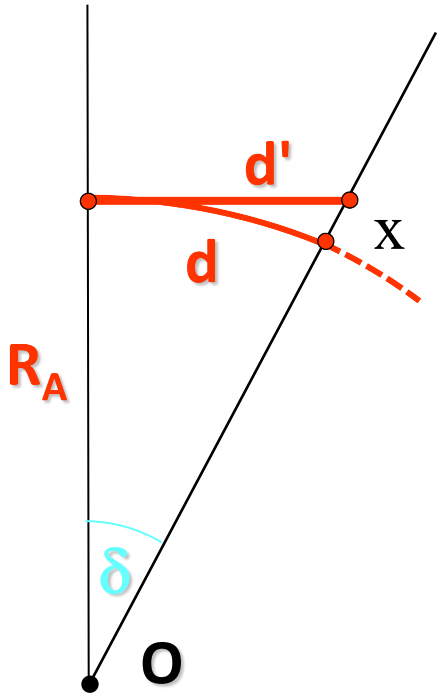
QUANDO SI MISURA UNA DISTANZA DELL’ORDINE DI 5KM SI USANO STRUMENTI LA CUI PRECISIONE E’ DELL’ORDINE DI

10^{-5} ± 1 cm su distanze di 5 km

LA SEMPLIFICAZIONE

d’ INVECE DI d
PORTA AD ERRORI INFERIORI DI UN ORDINE DI GRANDEZZA AGLI ERRORI DI MISURA

E’ LECITA



ERRORE IN QUOTA COMMESSO CONFONDENDO SFERA LOCALE PIANO TANGENTE

Calcolo di X

$d' \approx d$

$$R^2 + d^2 - (R+X)^2 = 0$$

$$R^2 + d^2 - R^2 - X^2 - 2RX = 0$$

$$X = d^2/2R$$

R=6370 Km

d =	350 m	1 Km	2Km	20 Km	100 Km
X=	1cm	8 cm	32cm	32 m	800 m

Determinazione coordinate curvilinee 1

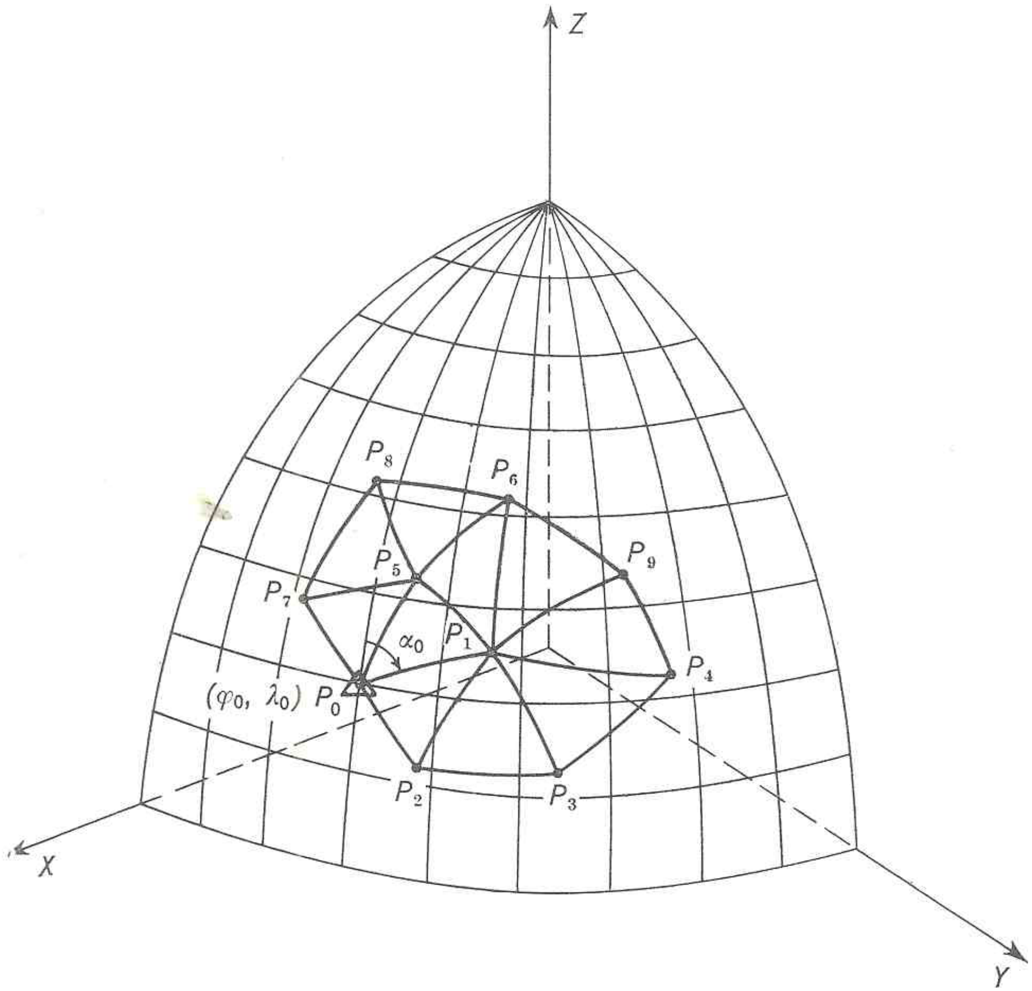


Fig. 1. Rete di punti di inquadramento sull'ellissoide.

Determinazione coordinate curvilinee

Problema diretto: dato $O_0(\varphi_0, \lambda_0)$ e α_0,s della geodetica trovare $P(\varphi,\lambda)$ e α

Problema inverso dati $O_0(\varphi_0, \lambda_0)$ e $P(\varphi,\lambda)$ trovare α_0,s

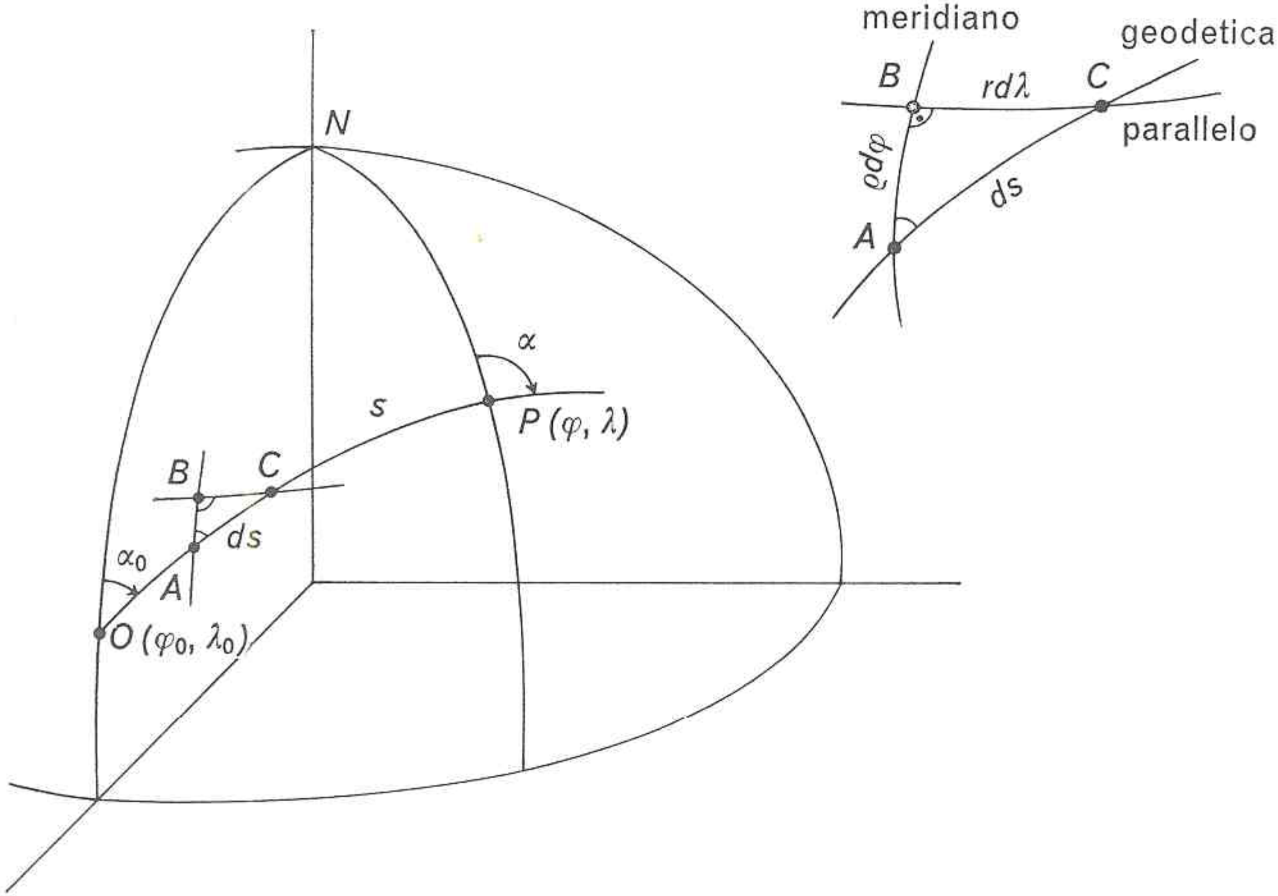


Fig. 3. Trasporto delle coordinate geografiche.

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial s^n} \right) s^n$$

$$\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \lambda}{\partial s^n} \right) s^n$$

$$\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \alpha}{\partial s^n} \right) s^n$$

$$\rho \mathrm{d}\varphi = ds \cos \alpha \qquad \mathrm{rd}\lambda = ds\, sin\, \alpha$$

Determinazione coordinate curvilinee

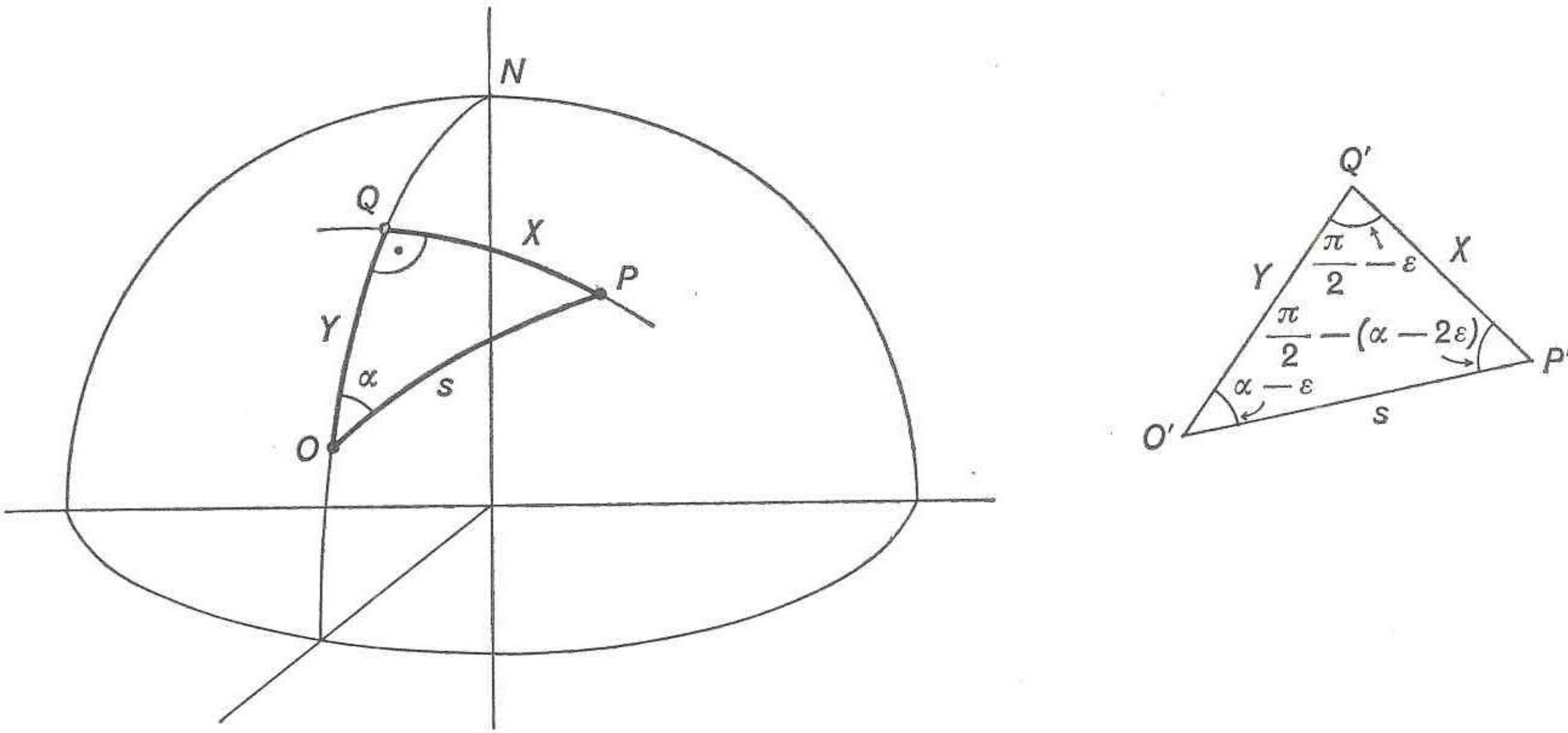


Fig. 4. Coordinate geodetiche polari e rettangolari.