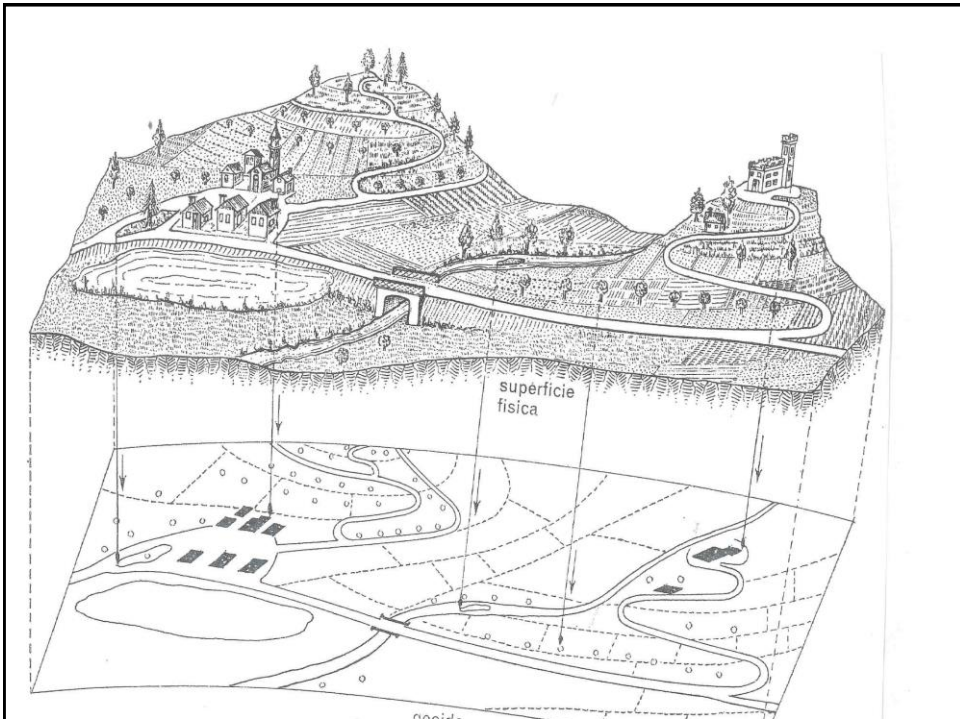


GEODESIA



Rappresentazione metrica (principali difficoltà)

- Superficie fisica di forma irregolare
- La superficie di rappresentazione ideale non è piana
- Dimensione del terreno superiore alla dimensione dell'uomo → complesse e raffinate operazioni di misura.

Operazioni teoriche per la rappresentazione

- Determinazione di un alto numero di punti
- Proiezione lungo la direzione della verticale sul geoide (distanza tra superficie e geoide = quota ortometrica)
- Misure sul geoide tra i punti: direzioni, angoli e distanze (la superficie è curva!)

- Determinazione delle coordinate curvilinee (è necessario conoscere la forma matematica della superficie)
- Costruzione in scala della zona misurata evidenziando le caratteristiche morfologiche, metriche e semantiche.
- Passaggio dalla rappresentazione sulla superficie curva ad una superficie piana, corrispondenza bi-univoca tra punti sul geoide e punti sul piano.

Operazioni pratiche

- Le misure sono fatte sulla superficie fisica → I metodi di misura di angoli e distanze tra punti della superficie fisica sono tali da fornire angoli e distanze quali si sarebbero misurati sul geoide
- Occorre definire:
- Equazione del geoide
- Sistema di coordinate curvilinee

Operazioni pratiche

- Definire in modo univoco angoli e distanze (superficie curva!)
- Definire i calcoli per dedurre dalle misure le coordinate curvilinee dei punti
- Specificare le rappresentazioni cartografiche e le deformazioni che queste comportano

SCOPO DELLA TOPOGRAFIA

**definire metricamente e
rappresentare il territorio**

definire metricamente



Definire un opportuno sistema di riferimento

rappresentare il territorio

PROBLEMA

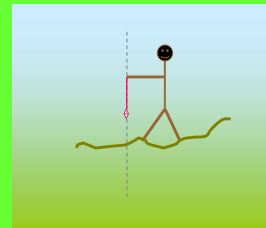
La superficie della terra ha una forma molto irregolare e non è possibile rappresentarla in forma analitica semplice

posso utilizzare una superficie di riferimento?

quale superficie viene
“spontaneo” utilizzare?

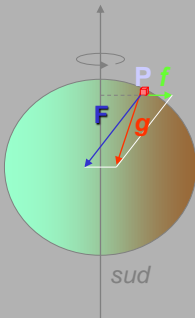
Dipende dalle dimensioni
dell’area di interesse?

In ogni punto della
superficie terrestre è
possibile individuare con
estrema facilità una
direzione di riferimento: **la
direzione del campo di
gravità.**



Ogni punto sulla superficie terrestre è sottoposto all'azione della **forza di gravità**

$$\mathbf{g} = \text{Forza gravitazionale } \mathbf{F} + \text{Forza centrifuga } \mathbf{f}$$



Campo vettoriale \rightarrow Potenziale
 $g(x,y,z)$ $V(x,y,z)$
 $f(x,y,z)$ $v(x,y,z)$

DEFINIAMO **LINEE DI FORZA** DEL CAMPO GRAVITAZIONALE LE LINEE CHE HANNO IN OGNI LORO PUNTO PER TANGENTE LA DIREZIONE DELLA FORZA

Le linee di forza del campo gravitazionale sono curve gobbe



La tangente alla linea di forza in un punto si chiama **verticale** e coincide con la direzione del **filo a piombo**: è facilmente individuabile

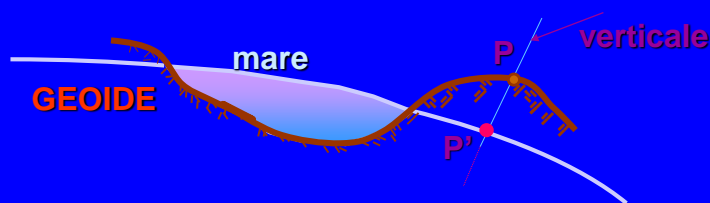
DEFINIAMO **SUPERFICI EQUIPOTENZIALI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE** LE SUPERFICI CHE IN OGNI LORO PUNTO SONO ORTOGONALI ALLA DIREZIONE DELLA FORZA

Superfici equipotenziali



$$\bar{g} = \text{grad } W \quad W = V + v$$

TRA LE INFINITE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI QUELLA CHE MEGLIO APPROSSIMA LA SUPERFICIE TOPOGRAFICA DELLA TERRA E' IL **GEOIDE**

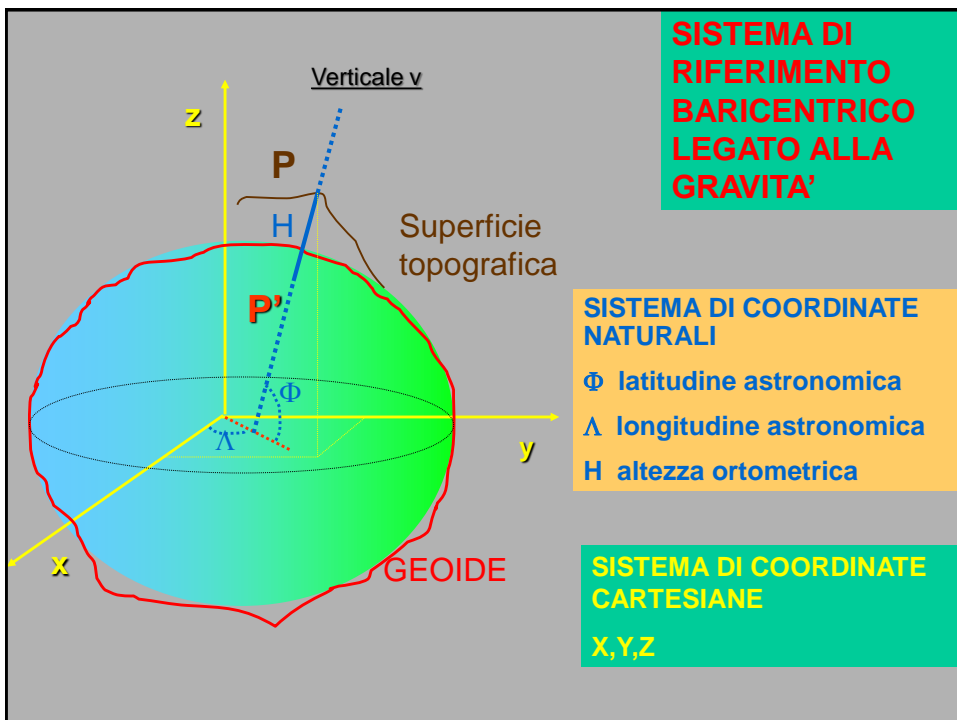


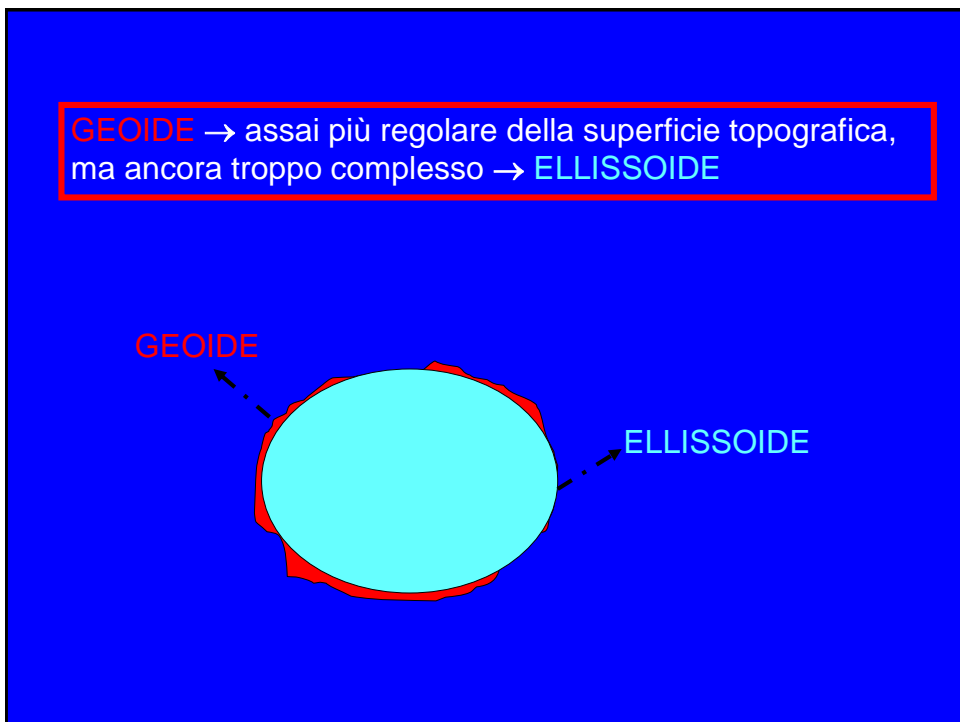
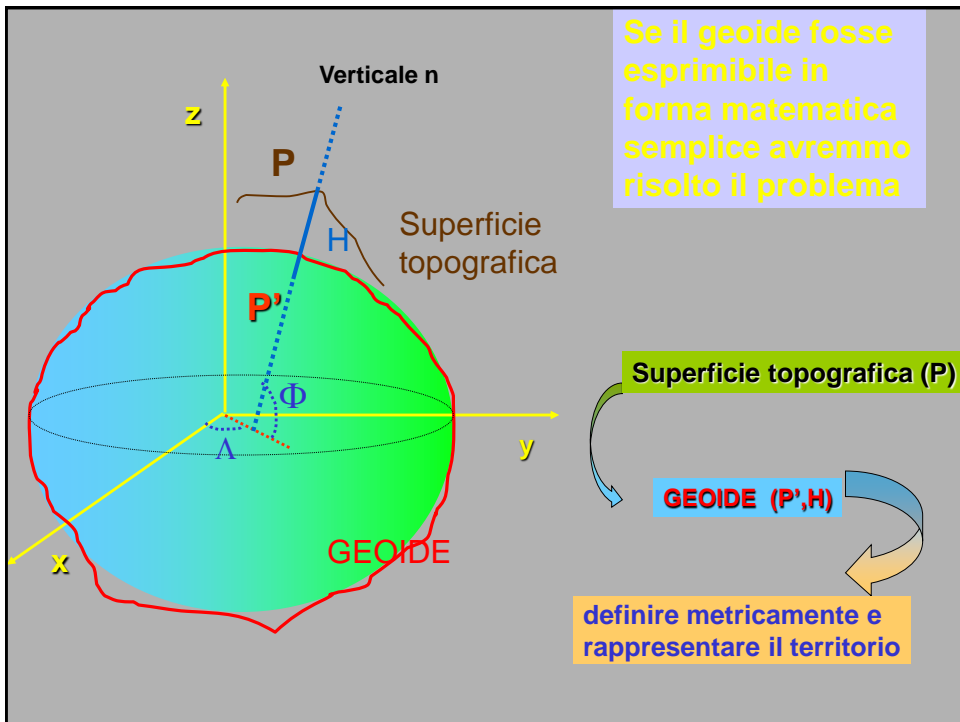
IL GEOIDE E' QUELLA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE DEL CAMPO DELLA GRAVITA' CHE IN PARTE COINCIDA CON LA SUPERFICIE "MEDIA" DEGLI OCEANI (depurata cioè dal moto ondoso e da alcune irregolarità periodiche o accidentali quali le maree, le variazioni di pressioni atmosferica, le correnti....)

LA MASSIMA ELEVAZIONE DELLE TERRE EMERSE E' CIRCA $2 \cdot 10^{-3} R$, DOVE R E' IL RAGGIO MEDIO TERRESTRE:
 $R \cong 6370 \text{ Km}$



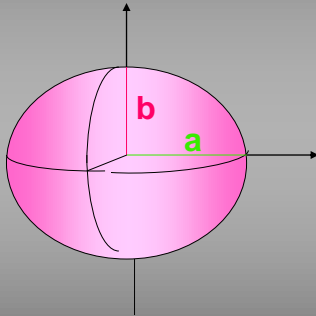
IL GEOIDE E' UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DELLA SUPERFICIE TOPOGRAFICA





ELLISSOIDE

L'Ellissoide è una superficie teorica generata dalla rotazione, intorno all'asse polare, di un'ellisse i cui semiassi hanno le dimensioni dei semiassi terrestri.



$a = 6.378.388 \text{ m}$
 $b = 6.356.911.946 \text{ m}$

L'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

Hayford
Sistema internazionale
1971

I parametri a e b sono calcolati sulla base di opportune misure

Con l'evolversi delle tecniche di osservazione tali parametri sono continuamente ricalcolati e "migliorati" da appositi Enti di Ricerca

GRS 67 $a=6378160 \text{ m}$

GRS 80 $a=6378137 \text{ m}$

il campo di gravità terrestre può essere scomposto nella somma di due termini:

$$\text{campo gravità} = \text{campo normale} + \text{campo anomalo}$$

campo gravità



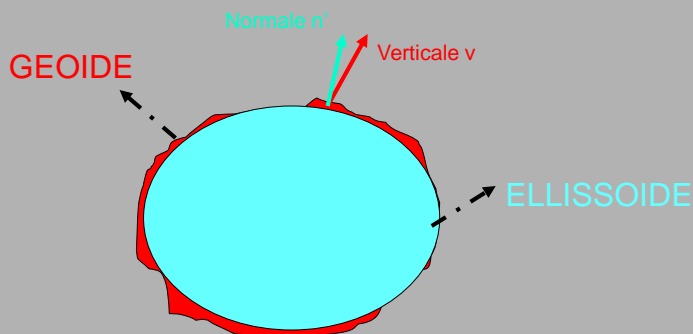
GEOIDE

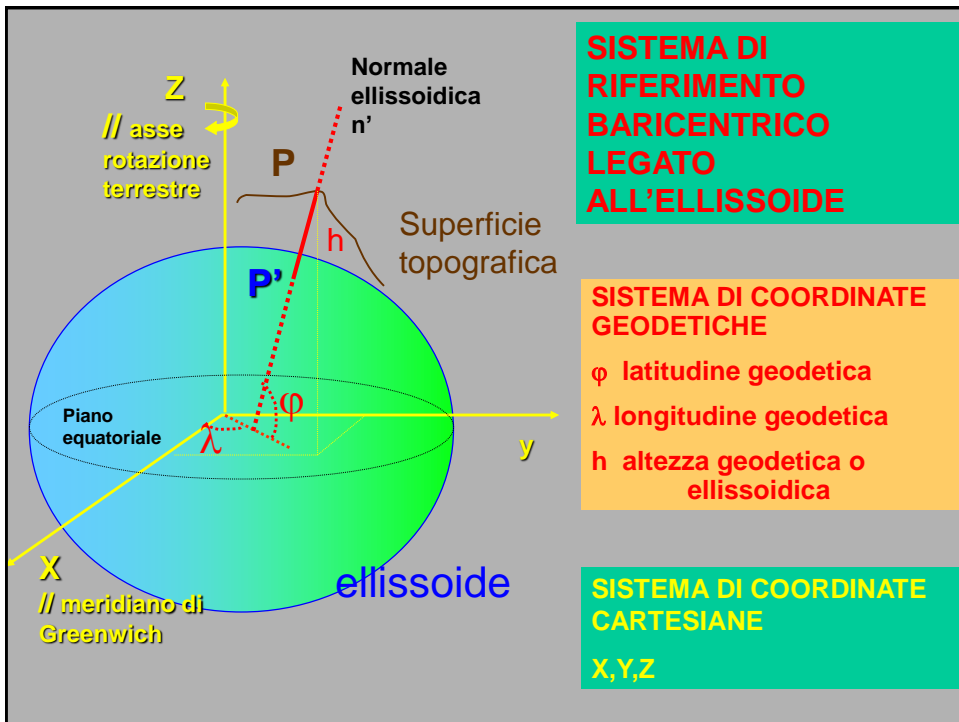
campo normale



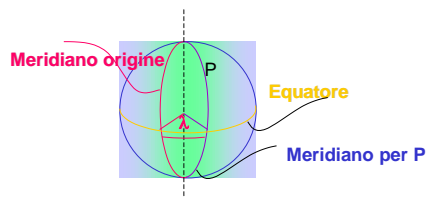
ELLISSOIDE

l'ellissoide è una particolare superficie equipotenziale del campo normale:
sull'ellissoide il potenziale normale ha lo stesso valore del potenziale di gravità sul geode





Longitudine: angolo tra il meridiano origine e il meridiano passante per P



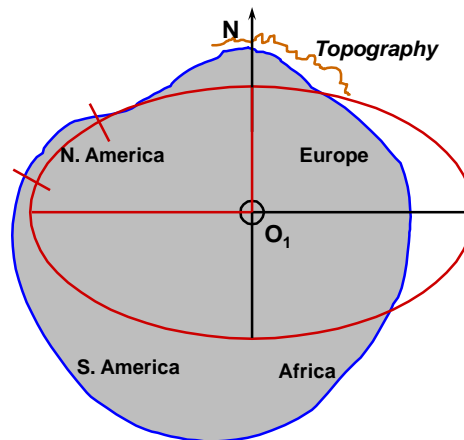
Ellissoide

La posizione di un punto generico P su di una superficie geometrica, può essere agevolmente individuata istituendo sulla superficie stessa un sistema di linee coordinate, capace di definire in maniera univoca la relativa ubicazione rispetto a due linee coordinate prescelte come origine di riferimento (equatore, meridiano fondamentale). Infatti, sezionando l'ellissoide di rotazione terrestre, prima con un infinito insieme di piani normali all'asse di rotazione terrestre, poi con un fascio di piani aventi per costola lo stesso asse di rotazione, è possibile ottenere sull'ellissoide stesso due distinte famiglie di curve, denominate paralleli e meridiani, intersecantesi ad angolo retto, capaci di compiere la stessa funzione di riferimento assoluta dagli assi cartesiani ortogonali del piano.

Assumendo quindi come parallelo di origine quello contenente il piano equatoriale, e scegliendo un meridiano di origine, la posizione di un punto P sull'ellissoide terrestre sarà determinata dalla coppia di linee coordinate che si intersecano nello stesso punto P .

Si può anche dire che la posizione di P si individua con la misura dell'angolo φ che la normale n in P all'ellissoide forma con il piano equatoriale, e la misura dell'angolo diedro λ che il piano contenente il meridiano passante per il punto P medesimo, forma con il piano contenente il meridiano di origine.

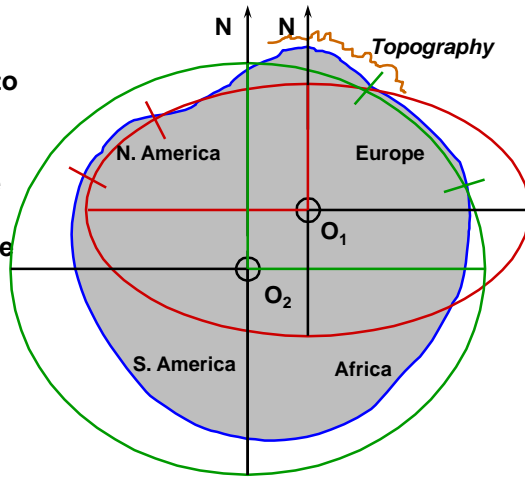
L'ellissoide e il geode



L'ellissoide e il geode

- Quale ellissoide scelgo ?

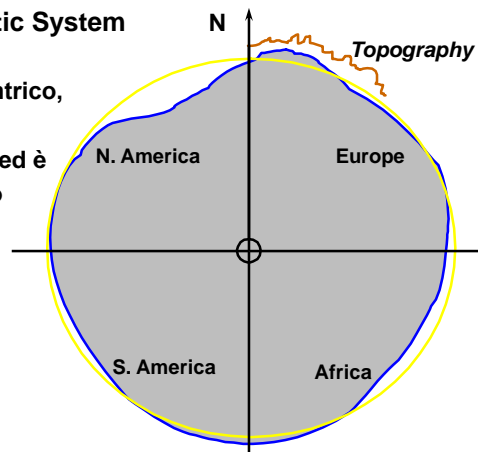
Normalmente, per sistemi di riferimento locali, si sceglie l'ellissoide con orientamento locale che meglio approssima il geode



L'ellissoide e il geode

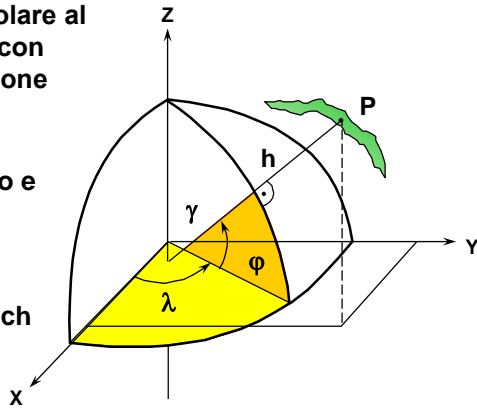
- The World Geodetic System (WGS 1984)

E' un ellissoide geocentrico, che approssima globalmente il geode, ed è utilizzabile quindi nello stesso modo per tutta la superficie terrestre



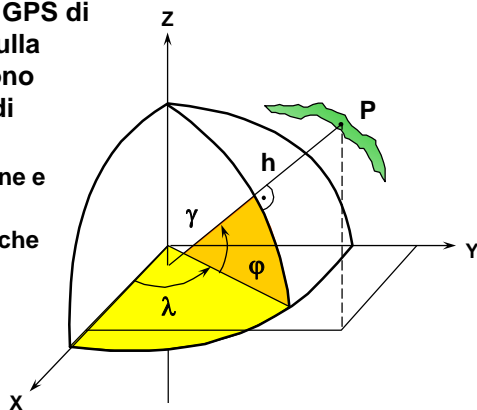
World Geodetic System (WGS84)

- L'origine coincide con il centro di massa della terra
- L'asse Z è perpendicolare al piano X,Y e coincide con l'asse medio di rotazione terrestre
- Gli assi X e Y sono perpendicolari tra loro e definiscono il piano equatoriale
- L'asse X passa per il Meridiano di Greenwich



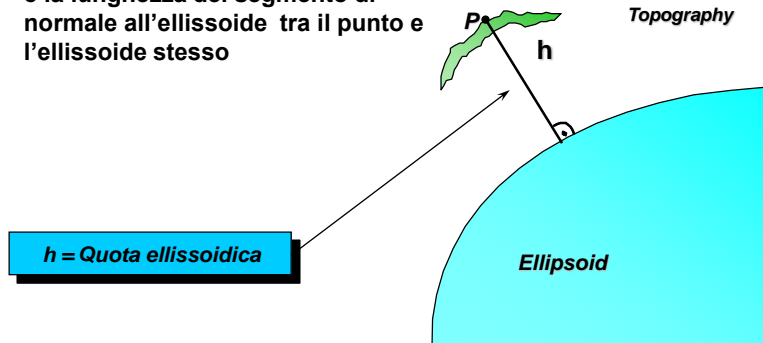
World Geodetic System (WGS84)

- Le posizioni e le coordinate calcolate dai ricevitori GPS di un generico punto P sulla superficie terrestre, sono espresse nel sistema di coordinate WGS 84
 - Latitudine, Longitudine e quota ellissoidica
 - Cartesiane geocentriche X,Y,Z



Il problema della quota

- Le quote determinate usando il GPS sono riferite all'ellissoide WGS 84
 - La quota ellissoidica di un punto "h" è la lunghezza del segmento di normale all'ellissoide tra il punto e l'ellissoide stesso



Il problema della quota

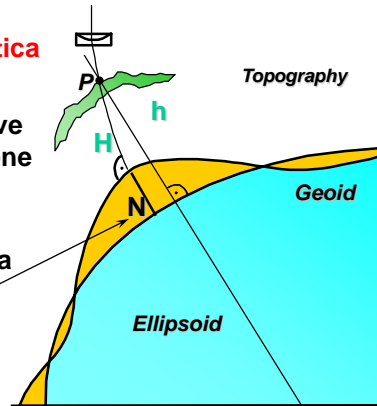
- Il geoid è una superficie equipotenziale che corrisponde al livello medio del mare
- Il geoid è ondulato a causa della distribuzione di massa.
- Le quote ortometriche sono riferite ad un **Datum** che è generalmente il livello medio dei mari; quota ortometrica di un punto è la lunghezza dell'arco di linea di forza tra il punto ed il geoid



Il problema della quota

- La differenza di quota tra l'ellissoide e il geoid è chiamata **ondulazione del geoid** o **separazione geodetica**
- **L'ondulazione del geoid** deve essere presa in considerazione per ottenere la quota ortometrica, se si conosce del punto la quota ellissoidica

$N = \text{Separazione geodetica}$



Il problema della quota

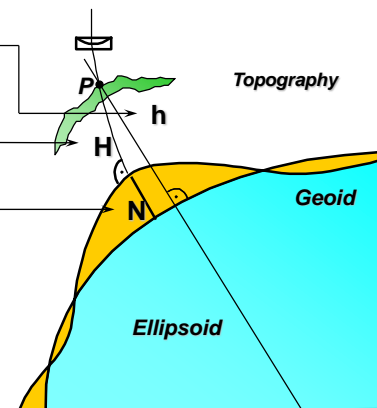
- L'ondulazione del geoid può essere sia positiva che negativa

$h = \text{Quota ellissoidica}$

$H = \text{Quota ortometrica}$
 $\text{Quota sopra il geoid}$

$N = \text{Separazione geodetica}$

$$h = H + N$$



Trasformazione di coordinate

- Il sistema di riferimento delle misure GPS è il geocentrico WGS84
- I sistemi geodetici locali impiegati in geodesia sono invece basati su ellissoidi orientati in modo da approssimare bene localmente la superficie geoidica
- Un qualsiasi ellissoide orientato localmente si differenzia in modo notevole da quello geocentrico del WGS84, non solo per i diversi parametri, ma soprattutto per la posizione del centro e l'orientamento degli assi
- Le coordinate geografiche di uno stesso punto nel datum locale e nel WGS84 risultano sensibilmente diverse

Trasformazione di coordinate

Nel caso di trasformazione dal sistema geocentrico WGS84 ad un sistema geodetico locale, occorre ricorrere ad algoritmi matematici. Le fasi della trasformazione (ipotizzando di passare da WGS84 a locale) sono le seguenti:

- 🕒 nel WGS84 si passa dalle coordinate geografiche alle coordinate cartesiane, riferite alla terna d'assi associata all'ellissoide
- 🕒 si opera una rototraslazione nello spazio per passare alle coordinate cartesiane nel secondo sistema geodetico (terna cartesiana associata al secondo ellissoide)
- 🕒 nel sistema locale si passa dalle coordinate cartesiane alle geografiche

Trasformazione di coordinate

- ☞ **Le fasi 1 e 3 vengono eseguite all'interno dello stesso ellissoide, e seguono semplici regole geometriche**
- ☞ **Il cambiamento di datum vero e proprio si ha nella fase 2, nella quale è necessaria la conoscenza dei **6 parametri (3 traslazioni e 3 rotazioni)** che definiscono la posizione relativa dei due sistemi cartesiani nello spazio.**
- ☞ **In realtà avviene che ogni datum è definito da una rete ad esso associata e quindi risente degli errori di misura e conseguenti distorsioni della rete stessa.**
- ☞ **Quindi il modello teorico viene modificato aggiungendo un fattore di scala che permette di modellare le imperfezioni della rete.**

Trasformazione di coordinate

Rototraslazione a 7 parametri

I parametri da stimare per una rototraslazione con fattore di scala sono quindi 7: 3 traslazioni - 3 rotazioni - 1 fattore di scala

La rototraslazione con fattore di scala è detta anche 'conforme' in quanto mantiene invariati gli angoli e quindi la forma delle figure che costituiscono il rilievo originario.

- ☞ **Per la trasformazione a 7 parametri occorrono almeno 3 punti noti nei due sistemi di riferimento, ma in pratica è opportuno che i punti noti siano in numero superiore allo stretto necessario, per dare maggiore consistenza alla stima**
- ☞ **Le trasformazioni più note sono quelle di Helmert e Molodensky**

Trasformazione di coordinate
Rototraslazione a 7 parametri

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{wgs84} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1 - \gamma) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{RM40}$$

T = traslazioni 3 parametri

Matrice di rotazione 3 parametri

γ = fattore di scala

Trasformazione di coordinate
Rototraslazione a 7 parametri

- Nei GIS sono utilizzati parametri approssimati
- Per stimare parametri sufficientemente precisi si possono utilizzare i **punti doppi**

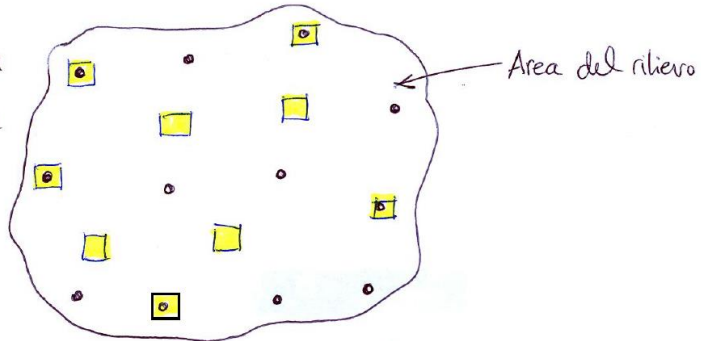
Ovvero conoscendo le coordinate di alcuni punti in entrambi i Datum si determinano i 7 parametri della trasformazione

Punti doppi

● PUNTI SISTEMA 1

■ PUNTI SISTEMA 2

■ PUNTI DOPPI



Esempio

Roma 40:

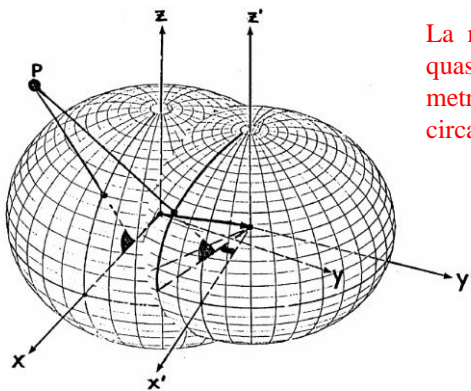
$$\varphi = 43^{\circ} 07' 37,250''$$

$$\omega = -0^{\circ} 23' 47,323'' \text{ E M.Mario} = 12^{\circ} 03' 21,077'' \text{ E Greenwich}$$

WGS 84:

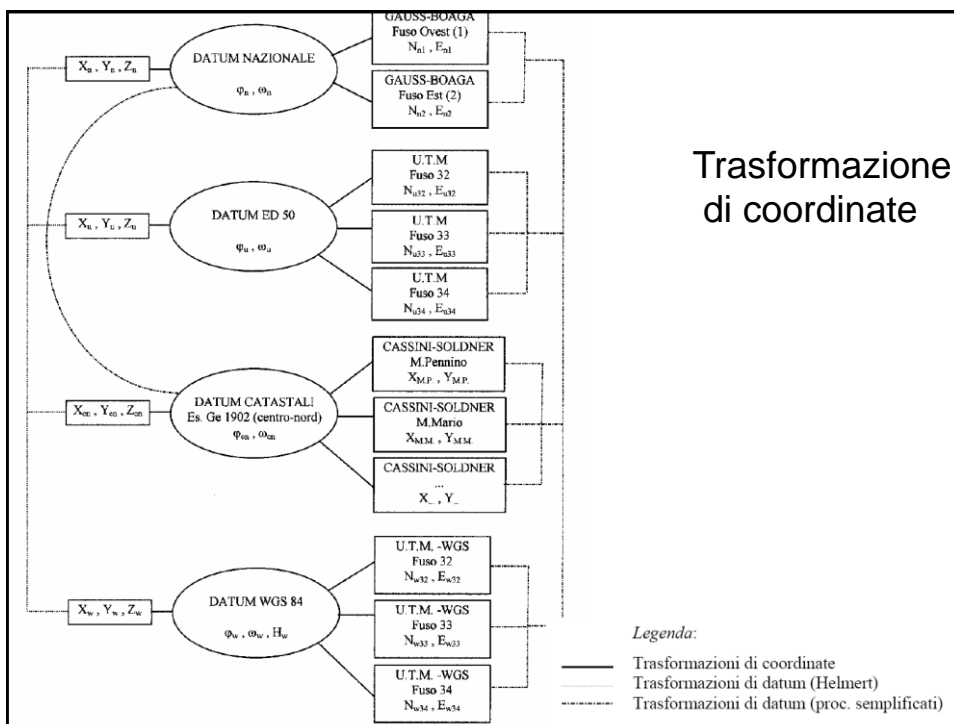
$$\varphi = 43^{\circ} 07' 39,584''$$

$$\omega = 12^{\circ} 03' 20,248'' \text{ E Greenwich}$$



La massima differenza in latitudine è di quasi 3", che corrispondono a circa 90 metri. 1" in longitudine corrispondono circa 20 metri.

Uno stesso punto P riferito a due diversi datum geodetici ha coordinate geografiche diverse (n.b. gli scostamenti sono esasperati). Da Beutler



Ellissoide	Semiassse maggiore	Schiacciamento
EVEREST (1830)	6.377.276 m	1/300.8
BESSEL (1841)	6.377.397 m	1/299.2
CLARKE (1866)	6.378.206 m	1/294.9
CLARKE (1880)	6.378.301 m	1/293.5
HELMERT (1906)	6.378.140 m	1/298.3
HAYFORD (1909)	6.378.388 m	1/297.0
KRASOVSKY (1942)	6.378.245 m	1/298.3
FISCHER (1960)	6.378.160 m	1/298.3
WGS84 (1987)	6.378.137 m	1/298.3

L'ellissoide di Hayford fu adottato nel 1924 dall'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale con la denominazione di ellissoide internazionale

Valori parametri per trasformazione di Datum

Region	Start datum	Target datum	C_x (Metre)	C_y (Metre)	C_z (Metre)	s (ppm)	r_x (Arcsecond)	r_y (Arcsecond)	r_z (Arcsecond)
Slovenia ETRS89	D48	D96	409.545	72.164	486.872	17.919665	-3.085957	-5.469110	11.020289
England, Scotland, Wales	WGS84	OSGB36 ¹²	-446.448	125.157	-542.06	20.4894	-0.1502	-0.247	-0.8421
Ireland	WGS84	Ireland 1965	-482.53	130.596	-564.557	-8.15	1.042	0.214	0.631
Germany	WGS84	DHDN	-591.28	-81.35	-396.39	-9.82	1.4770	-0.0736	-1.4580
Germany	WGS84	Bessel 1841	-582	-105	-414	-8.3	-1.04	-0.35	3.08
Germany	WGS84	Krassovski 1940	-24	123	94	-1.1	-0.02	0.26	0.13
Austria (BEV)	WGS84	MGI	-577.326	-90.129	-463.920	-2.423	5.137	1.474	5.297
USA	WGS84	Clarke 1866	8	-160	-176	0	0	0	0

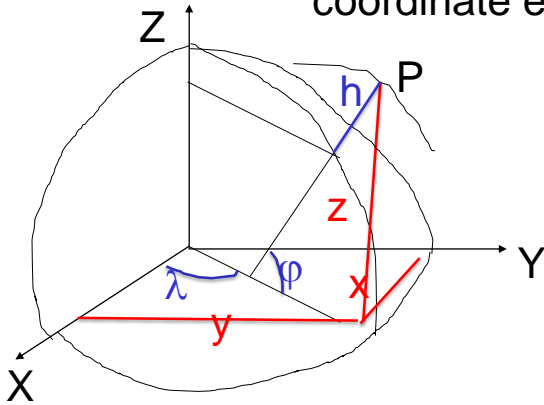
Fissato il sistema di riferimento



Il passaggio da un sistema di coordinate all'altro è un problema puramente analitico

ellissoidiche → cartesiane

$X=X(\varphi,\lambda,h)$ Si esprime la posizione di un
 $Y=Y(\varphi,\lambda,h)$ punto, in coordinate cartesiane
 $Z=Z(\varphi,\lambda,h)$ geocentriche, in funzione delle
coordinate ellissoidiche



Ad esempio: **sistema di riferimento ellissoidico**

φ, λ, h

X, Y, Z

$$X = (R_n + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

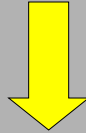
$$Y = (R_n + h) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = [R_n (1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

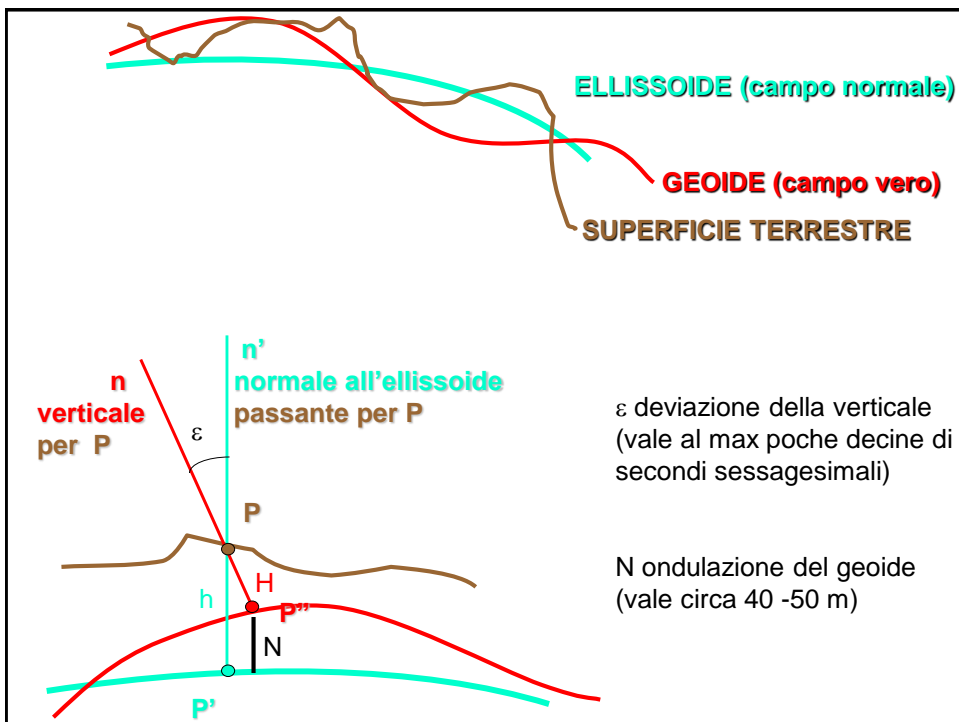
Dove: $R_n = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$

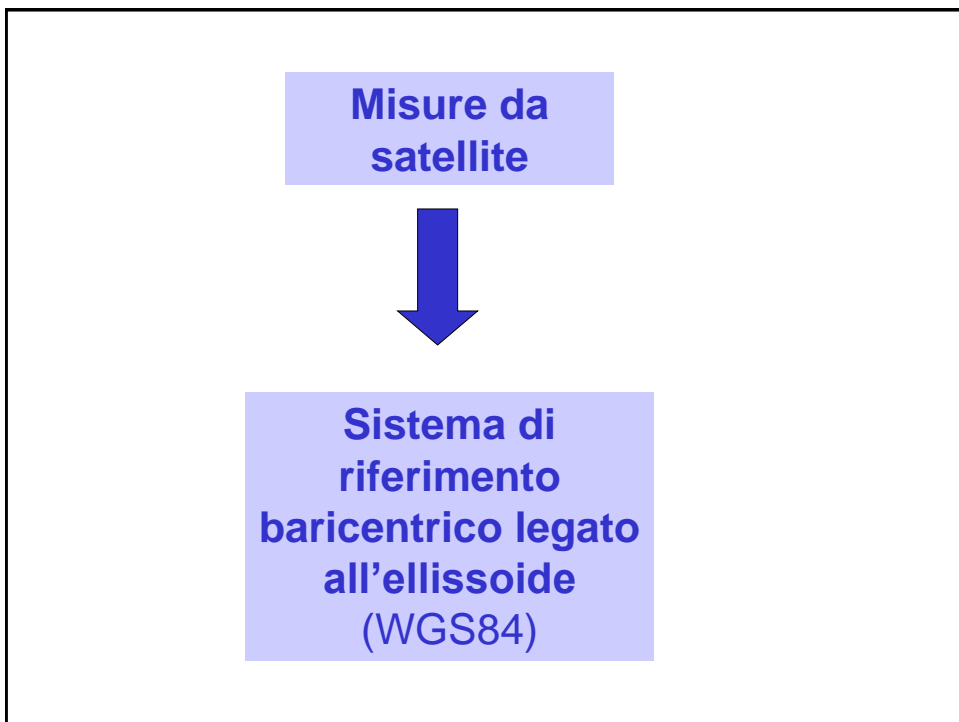
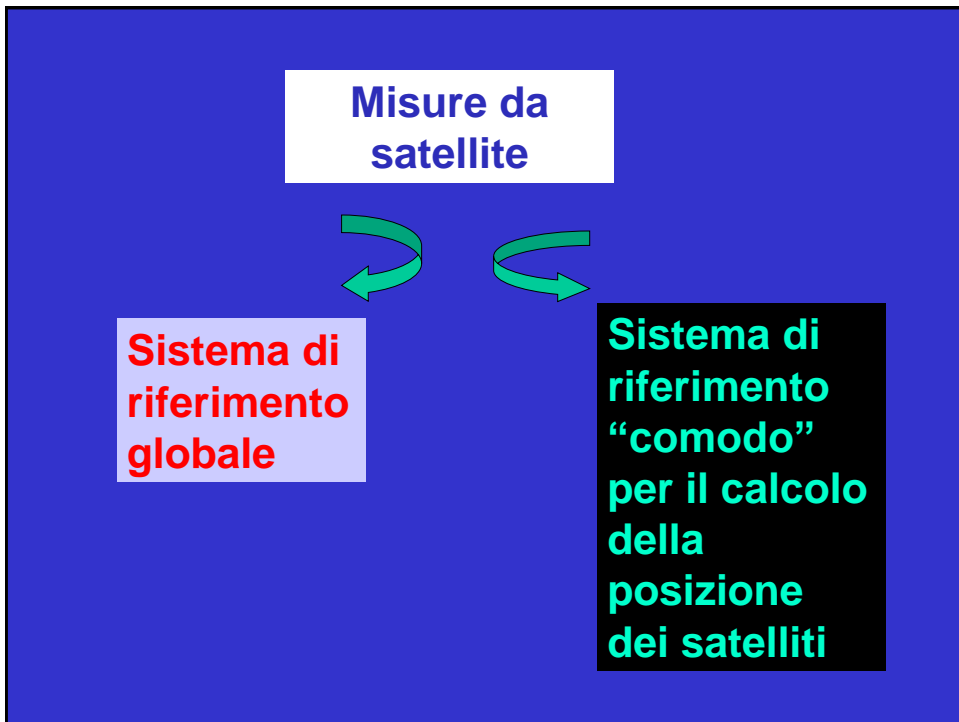
$$e^2 = 1 - (b^2/a^2)$$

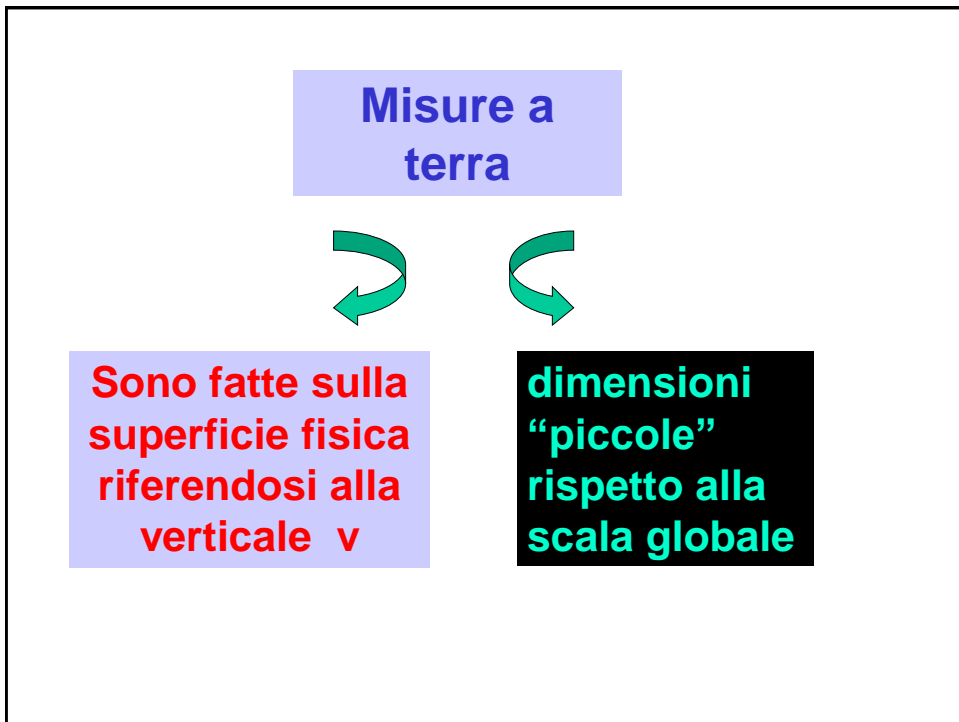
Fissare il sistema di riferimento



Decidere quale approssimazione di campo di gravità adottare







**QUALE APPROSSIMAZIONE DI CAMPO
ADOTTARE?**

**LA SCELTA DIPENDE DAGLI ERRORI
CHE NE DERIVANO**

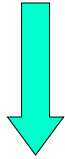
**TALI ERRORI DEVONO ESSERE
INFERIORI AGLI ERRORI DI
MISURA**

(ambito di validità)

Errori di misura (planimetria)

Precisione relativa al
massimo di 10^{-6}

Posso misurare una
distanza di 1 Km con
una precisione di 1 mm



Tutte le approssimazioni che
comportano effetti inferiori a
 10^{-6} sono accettabili

• il geoide rappresenta la superficie di riferimento utilizzata per la determinazione delle quote,

• l'ellissoide è utilizzato per la definizione delle coordinate planimetriche.

Entità errori

altimetria

planimetria

Geoide → per l'altimetria

Ellissoide → per la planimetria

planimetria

Campo normale	ellissoide baricentrico	globale
---------------	-------------------------	---------

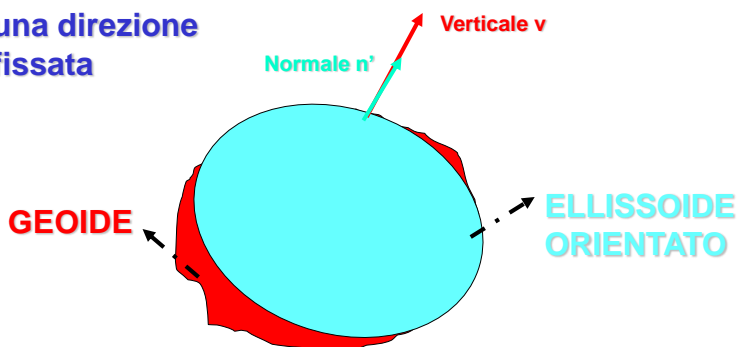
Campo normale	ellissoide orientato localmente	nazionale
---------------	---------------------------------	-----------

ELLISSOIDE ORIENTATO LOCALMENTE

$N=0$

$v=n'$

una direzione fissata



Come far coincide $v=n$ in un punto?

Si effettuano misure astronomiche:
Latitudine e Longitudine di un punto
Azimut astronomico

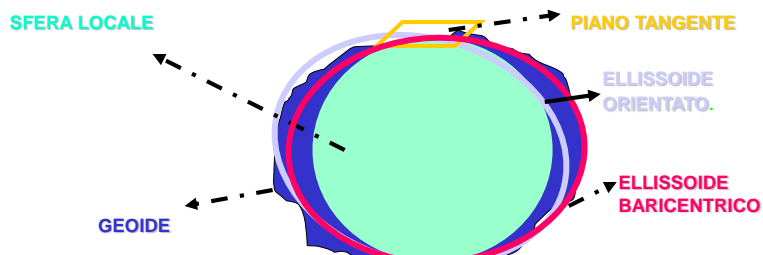
$$\varphi_{ell} \equiv \varphi_{astr} \quad \alpha_{ell} \equiv \alpha_{astr}$$
$$\lambda_{ell} \equiv \lambda_{astr}$$

Datum fissato.

planimetria

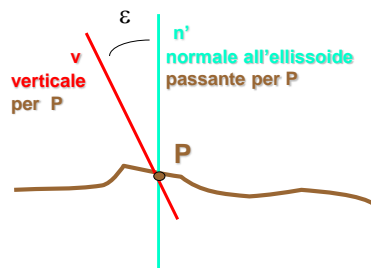
Campo sferico	sfera locale	campo geodetico (100 km)
------------------	-----------------	--------------------------------

Campo piano	piano tangente	campo topografico (10 km)
----------------	-------------------	---------------------------------



Misure a terra

**Sono fatte sulla superficie fisica
riferendosi alla verticale v**



ε deviazione della verticale

**Come riportare le misure effettuate
sulla superficie terrestre alla
superficie di riferimento?**

altimetria

Precisioni relative di
 10^{-6}
(livellazione geometrica)



geoide

Precisioni relative di
 10^{-5}
(livellazione trigonometrica)



Sfera locale