Fisica per Farmacia A.A. 2018/2019

Responsabile del corso: Prof. Alessandro Lascialfari

Tutor (16 ore): Matteo Avolio

Lezione del 28/03/2019 – 2 h (13:30-15:30, Aula G10, Golgi) - **SOLUZIONI**

<u>ESERCITAZIONI – DINAMICA 2</u>

Esercizio 1 – piano inclinato

Due corpi di uguale massa scivolano lungo un piano inclinato di 15° rispetto alla direzione orizzontale. Il primo corpo non subisce attrito, mentre il secondo corpo è soggetto ad attrito dinamico di coefficiente μ = 0.1. Quanto è lungo il tragitto, affinché i due corpi, partendo contemporaneamente da fermo dallo stesso punto, arrivino con una differenza temporale di 5 sec?

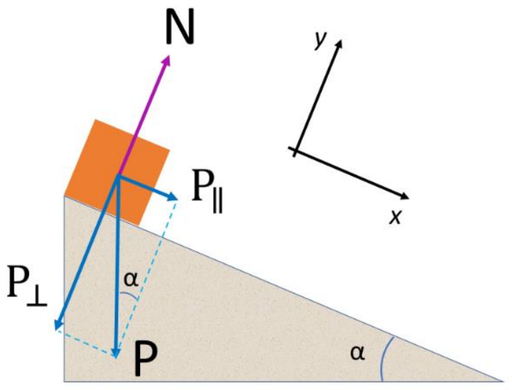
SOLUZIONE

Per risolvere il problema, calcoliamo quanto tempo impiega ciascun corpo a raggiungere la base del piano inclinato, supponendo la sua lunghezza (quindi quella del tragitto) pari a S.

Poniamo inoltre $m_1 = m_2 = m$. (NOTA: se la massa non è data, come in questo problema, non è possibile calcolare subito quanto valgono le singole forze, es. forza peso e sue componenti. In questo caso possiamo intuire che, scrivendo per esteso le espressioni delle forze, arriveremo a un certo punto a scrivere un'equazione nella quale la massa dei corpi si semplificherà ad ogni membro).

<u>Corpo 1</u> – Scivola senza attrito

Per prima cosa fissiamo un sistema di riferimento x-y solidale al piano inclinato, quindi con l'asse x parallelo al piano stesso e l'origine in corrispondenza del punto di partenza del corpo.



La forza peso del corpo può essere scomposta nelle sue due componenti parallela e perpendicolare al piano, notando che il triangolo rettangolo avente P come ipotenusa e $P_{\parallel}$ e $P_{\perp}$ come cateti è simile al triangolo che rappresenta il piano inclinato, dunque l'angolo α è lo stesso nei due casi:

$$P_{\parallel} = P \sin\alpha = mg \sin\alpha$$

$$P_{\perp} = P \cos\alpha = mg \cos\alpha$$

Il piano inclinato eserciterà una reazione vincolare sul corpo, che per definizione è perpendicolare al piano stesso e quindi, ponendo uguale a zero la somma delle forze agenti lungo y, in grado di bilanciare la sola componente perpendicolare della forza peso:

$$N - P_{\perp} = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = P_{\perp}$$

La componente parallela al piano della forza peso non è invece bilanciata da nessuna altra forza (non ci sono vincoli lungo x), dunque per il secondo principio della dinamica:

$$P_{\parallel} = ma_1$$

$$mg \sin\alpha = ma_1$$

Semplifichiamo la massa a ogni membro e troviamo:

$$a_1 = g \sin\alpha = 9.81 \sin 15° = 2.54\, m/s^2$$

Notiamo che l'accelerazione NON DIPENDE DALLA MASSA DEL CORPO, e altro non è che la componente dell'accelerazione g lungo il piano inclinato.

Lo scivolamento del corpo lungo lungo x è dunque descritto da un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

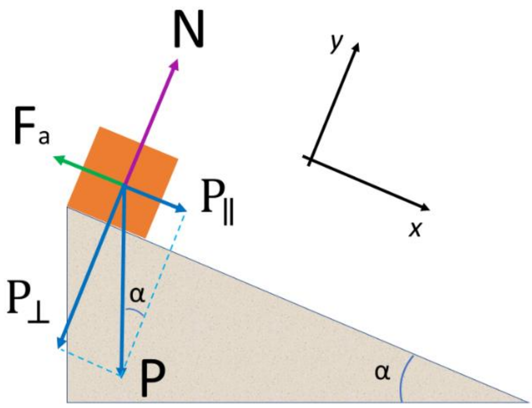
$$x(t_1) = S$$

$$S = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$$

Dunque:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a_1}}$$

<u>Corpo 2</u> -Scivola con attrito



Per il corpo 2 l'impostazione del problema è analoga al corpo 1, bisogna però anche considerare la forza di attrito, che è pari a:

$$F_a = \mu N = \mu P_\perp = \mu\, mg \cos\alpha$$

Determiniamo quindi l'accelerazione del corpo 2 applicando lungo x il secondo principio della dinamica:

$$\sum F_x = ma_2$$

$$P_\parallel - F_a = ma_2$$

$$mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha = ma_2$$

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 9.81\,(\sin 15° - 0.1 \cos 15°)\frac{m}{s^2} = 1.59\, m/s^2$$

Anche in questo caso l'accelerazione non dipende dalla massa del corpo.

Allo stesso modo di quanto visto per il corpo 1, lo scivolamento del corpo 2 lungo il piano (lungo x) è dunque descritto da un moto rettilineo uniformemente accelerato: $S = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$

Da cui:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}}$$

S è lo stesso per i due corpi perché partendo dallo stesso punto percorrono lo stesso piano inclinato.

Il problema ci dice che la differenza temporale di arrivo in fondo al piano dei due corpi è di 5 secondi, perciò, essendo il corpo 2 più lento ($a_2 < a_1$):

$$t_2 - t_1 = 5$$

$$\sqrt{\frac{2S}{a_2}} - \sqrt{\frac{2S}{a_1}} = 5$$

$$\sqrt{S} = \frac{5}{\sqrt{\frac{2}{a_2}} - \sqrt{\frac{2}{a_1}}}$$

$$S = \left(\frac{5}{\sqrt{\frac{2}{a_2}} - \sqrt{\frac{2}{a_1}}}\right)^2 = \frac{25}{\left(\sqrt{\frac{2}{1.59}} - \sqrt{\frac{2}{2.54}}\right)^2} m = 456\ m$$

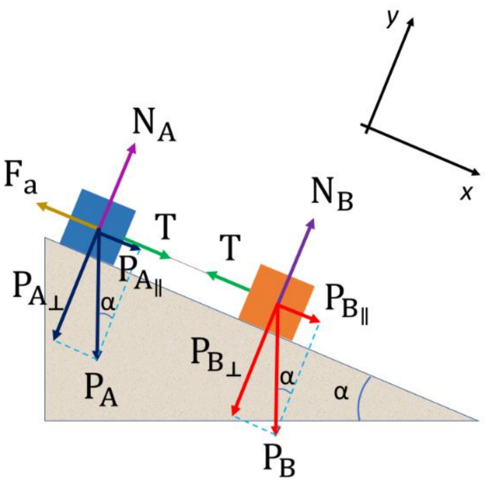
Esercizio 2 – piano inclinato

Due corpi di massa m_A = 20 kg e m_B = 10 kg sono collegati da una fune inestensibile priva di massa. I due corpi scivolano lungo un piano inclinato di un angolo α = 30° rispetto alla direzione orizzontale. Il corpo di massa m_A, situato più in alto rispetto al corpo di massa m_B, presenta un coefficiente di attrito dinamico pari a 0.25 mentre il corpo di massa m_B scivola lungo il piano inclinato senza attrito. Calcolare

a) l'accelerazione dei 2 corpi durante la caduta;
b) la tensione della corda;
c) assumendo che anche il corpo A scivoli senza attrito, determinare la tensione della corda in queste condizioni.

SOLUZIONE

Rappresentiamo schematicamente tutte le forze agenti sui due corpi: le forze peso, la reazione vincolare del piano, la forza di attrito e la tensione della corda (a entrambi i capi). Fissiamo un sistema di riferimento solidale al piano inclinato, in base al quale assegneremo il giusto segno a ciascuna forza. Scomponiamo poi la forza peso di ciascun corpo nelle due componenti lungo x e lungo y, ovvero le due componenti rispettivamente parallela e perpendicolare al piano inclinato.



$$m_A = 20\ kg$$

$$m_B = 10\ kg$$

$$\alpha = 30°$$

$$\mu_D = 0.25$$

a) $a_A = ?$ $a_B = ?$

b) $T = ?$

c) $T = ?$ $se\ \mu_D = 0$

a) Come nell'esercizio 1, lungo y la reazione vincolare del piano bilancia la componente perpendicolare al piano della forza peso, dunque:

$$N_A = m_A g \cos\alpha \qquad N_B = m_B g \cos\alpha.$$

Lungo x, invece, la componente della forza peso parallela al piano tende a far scivolare i due corpi verso il basso. Il corpo A, però, è frenato dalla forza di attrito, ma tramite la tensione della corda che lega i due corpi durante la caduta anche il corpo B sarà rallentato (o, vedendola al contrario, B tenderà a trascinare con sé il corpo A accelerandolo; tutto ciò è descritto dalla tensione T ai due capi della corda). L'accelerazione dei due corpi sarà dunque ancora uguale e possiamo fissare:

$$a_A = a_B = a$$

Per determinare a, scriviamo l'equazione derivante dall'applicazione del secondo principio della dinamica $\left(\sum F_x = ma_x\right)$ a ciascuno dei due corpi:

$$\begin{cases} P_{A_\parallel} + T - F_a = m_A a \\ P_{B_\parallel} - T = m_B a \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$T = P_{B_\parallel} - m_B a$$

E la sostituiamo nella prima equazione

$$P_{A_\parallel} + P_{B_\parallel} - m_B a - F_a = m_A a$$
$$P_{A_\parallel} + P_{B_\parallel} - \mu_D N_A = (m_A + m_B)\, a$$
$$m_A g \sin\alpha + m_B g \sin\alpha - \mu_D m_A g \cos\alpha = (m_A + m_B)\, a$$
$$(m_A + m_B)\, g \sin\alpha - \mu_D m_A g \cos\alpha = (m_A + m_B)\, a$$

$$a = \frac{(m_A + m_B)\, g \sin\alpha - \mu_D m_A g \cos\alpha}{m_A + m_B}$$

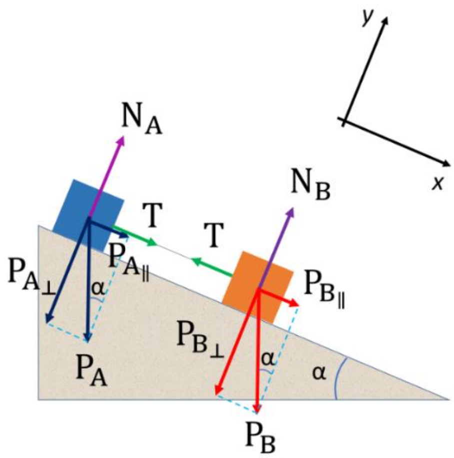
$$a = \frac{(20+10)\cdot 9.81 \sin 30° - 0.25 \cdot 20 \cdot 9.81 \cos 30°}{20+10}\frac{m}{s^2} = \frac{30 \cdot 9.8 \cdot \frac{1}{2} - 0.25 \cdot 20 \cdot 9.81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{30}\frac{m}{s^2}$$

$$a = 3.48\ \frac{m}{s^2}$$

b) Per calcolare la tensione della corda, riprendiamo la seconda equazione del sistema precedente relativa alle forze agenti lungo x sul corpo B:

$$P_{B_\parallel} - T = m_B a$$
$$T = P_{B_\parallel} - m_B a = m_B g \sin\alpha - m_B a = m_B(g \sin\alpha - a)$$
$$T = m_B(g \sin\alpha - a) = 10\,(9.81 \sin 30° - 3.48) = 14.2\ N$$

c) In assenza di attrito, basta eliminare F_a dalle equazioni utilizzate per rispondere al punto b:



$$\begin{cases} P_{A_\parallel} + T = m_A a \\ P_{B_\parallel} - T = m_B a \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$T = P_{B_\parallel} - m_B a$$

E la sostituiamo nella prima equazione

$$P_{A_\parallel} + P_{B_\parallel} - m_B a = m_A a$$
$$P_{A_\parallel} + P_{B_\parallel} = (m_A + m_B)\, a$$
$$m_A g \sin\alpha + m_B g \sin\alpha = (m_A + m_B)\, a$$
$$(m_A + m_B)\, g \sin\alpha = (m_A + m_B)\, a$$
$$a = g \sin\alpha$$

Quindi:

$$T = P_{B_\parallel} - m_B a = m_B g \sin\alpha - m_B a = m_B g \sin\alpha - m_B g \sin\alpha = 0$$

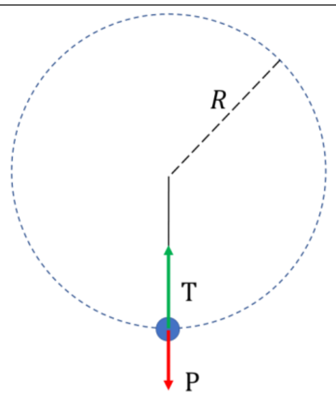
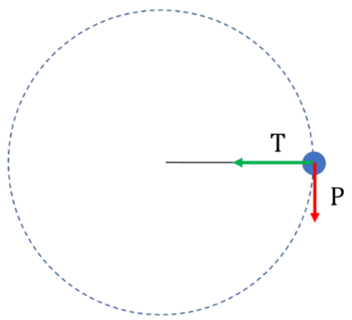
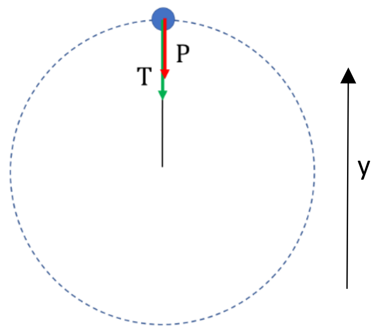
In pratica, in assenza di attrito i 2 corpi scivolano con la stessa accelerazione ($g \sin \alpha$) come il corpo visto nell'esercizio 1: il fatto che siano legati è del tutto ininfluente. Se non ci fosse la corda, la distanza tra i due corpi rimarrebbe comunque costante. Nessun corpo esercita una forza di trazione sull'altro, e la tensione è nulla.

Esercizio 3 – forza centripeta nel piano verticale

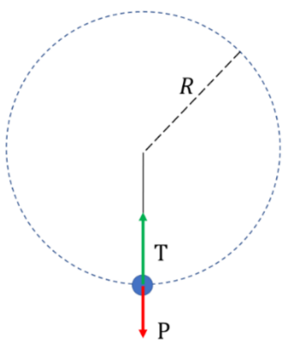
Un corpo di massa m viene fissato ad una estremità di una fune inestensibile lunga 1.5 m. Mantenendo fissa l'altra estremità della fune si fa descrivere al corpo una traiettoria circolare in un piano verticale. Sapendo che il carico di rottura della fune è $T_0 = 60$ N, calcolare il valore che deve avere la massa m del corpo affinché la massima frequenza che si può imporre al sistema, senza che la fune si spezzi nel punto più basso della traiettoria circolare, sia $f_{MAX} = 0.4$ giri/sec.

SOLUZIONE

Il problema chiede di calcolare il carico massimo della fune considerando il punto più basso della traiettoria. Questa richiesta non è casuale: il punto più basso della traiettoria è infatti quello in cui si richiede alla fune di sopportare il massimo sforzo. Le forze che la fune dovrà sopportare sono due: la forza peso e la forza centripeta necessaria a far percorrere al corpo la traiettoria circolare. Inoltre, contrariamente a tutti gli altri punti della traiettoria, nel punto più basso della traiettoria tutta la forza peso (per intero, e non solo una sua componente) graverà sulla fune. Perciò, se la fune non si rompe nel punto più basso della traiettoria circolare, non si romperà in nessun altro punto.
Vediamo schematizzate le principali casistiche per un corpo di massa *m* che si muove di moto circolare uniforme (raggio *R* e velocità tangenziale costante) nel piano verticale (asse y di riferimento orientato verso l'alto):

		
$T - P = F_c$ $T = P + F_c$ Alla fune è richiesto il massimo sforzo: bilanciare la forza peso e fornire la forza centripeta	$T = F_c$ La forza peso non grava per nulla sulla fune, che deve solo fornire la forza centripeta per il moto	$T + P = F_c$ $T = F_c - P$ La forza peso stessa fornisce parte della forza centripeta. La tensione della fune è minima.

Nel problema in esame la situazione è la prima. Dunque:



$$R = 1.5\, m$$
$$T_0 = 60\, N \quad \text{tensione di rottura}$$
$$f_{max} = 0.4\, s^{-1}$$

$$T = P + F_c$$
$$T = mg + ma_c$$
$$T = m(g + a_c)$$

Dove $a_c = \omega^2 R$ è l'accelerazione centripeta, con ω la velocità angolare del moto ($\omega = 2\pi/T$). Dunque:

$$T = m(g + \omega^2 R)$$

Da cui, imponendo $T = T_0$ di rottura e

$$\omega = \omega_{max} = 2\pi f_{max} = 2\pi \cdot 0.4 \frac{rad}{s} = 2.5\, rad/s$$

possiamo ricavare il valore che deve avere la massa:

$$m = \frac{T_0}{g + \omega_{max}^2 R} = \frac{60}{9.81 + 2.5^{\,2} \cdot 1.5} kg = 3.1\, kg$$

Esercizio 4 – molla nel piano orizzontale

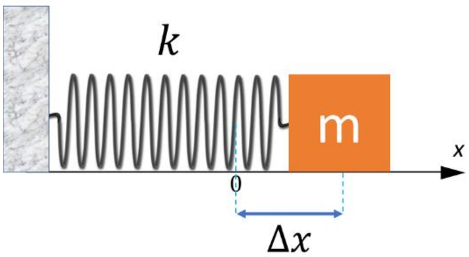
Un corpo di massa 200 g è collegato ad una molla di costante elastica k = 5 N/m ed è libero di oscillare su un piano orizzontale privo di attrito. Se il corpo parte da fermo in una posizione distante 5 cm dalla posizione di equilibrio, trovare:

a) il periodo di oscillazione del moto;
b) la velocità massima e l'accelerazione massima del corpo.

SOLUZIONE

Regola generale: nella risoluzione di un problema, conviene sempre riscrivere i dati convertendo subito tutte le quantità nelle unità del sistema internazionale. In questo esercizio, ad esempio, la costante elastica è data in N/m, l'allungamento iniziale in cm e la massa in grammi. Non convertire le unità di misura è una facile causa di errore.

Capiamo dal testo che la distanza dalla posizione di equilibrio è uguale all'allungamento iniziale della molla:



$$m = 200g = 0.200\, kg$$

$$k = 5\, N/m$$

$$\Delta x = 5\, cm = 0.05\, m$$

a) Per trovare il periodo di oscillazione del moto, applichiamo la semplice formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.200}{5}} = 1.26\, s$$

La pulsazione del moto vale invece

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.26}\frac{rad}{s} = 5.0\, rad/s$$

b) Scriviamo la legge oraria del moto armonico. L'ampiezza massima A del moto sarà uguale all'allungamento iniziale della molla, ovvero $A = \Delta x = 0.05\, m$.

$$x(t) = A\ \cos(\omega t + \varphi)$$

Derivandola troviamo la velocità

$$v(t) = -A\omega\ \sin(\omega t + \varphi)$$

Dal momento che il seno ha valori compresi tra -1 e 1, la velocità massima del corpo è pari a

$$v_{max} = A\omega = 0.05 \cdot 5.0 \frac{m}{s} = 0.25\, m/s$$

Troviamo infine l'accelerazione del corpo derivando la velocità rispetto al tempo:

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

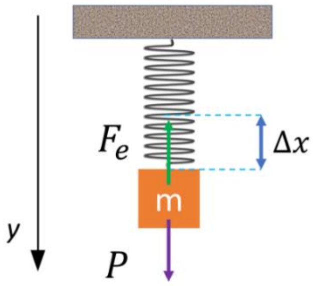
Anche in questo caso, poiché il coseno ha valori compresi tra -1 e 1, l'accelerazione massima del corpo si trova essere pari a

$$a_{max} = A\omega^2 = 0.05 \cdot (5.0)^2 \frac{m}{s^2} = 1.25\, m/s^2$$

Esercizio 5 – molla nel piano verticale

Una massa di 50 g appesa all'estremità inferiore di una molla posta in verticale provoca un allungamento di 1 cm. Determinare la massa che bisognerebbe appendere alla molla affinché essa oscilli con un periodo di 1 secondo.

SOLUZIONE

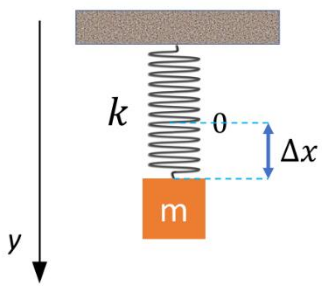


$$m = 50\, g = 0.050\, Kg$$

$$\Delta x = 1\, cm = 0.01\, m$$

$$T = 1\, s$$

Siamo in una situazione di equilibrio: il corpo è fermo e dunque la somma delle forze agenti su di esso è nulla. Le uniche forze in gioco agiscono lungo la direzione y, di cui fissiamo il verso positivo verso il basso. Si tratta della forza peso, diretta verso il basso, e della forza elastica che richiama la molla verso la sua posizione di riposo, agente verso l'alto:



$$\sum F_y = 0$$

$$P - F_e = 0$$

$$mg - k\Delta x = 0$$

Occorre porre attenzione al segno della forza elastica. Il segno meno tipicamente inserito nella sua definizione ($F_e = -kx$) sta a indicare che la forza è di richiamo verso la posizione di riposo della molla, e dunque di verso opposto rispetto a x. In questo caso stiamo esplicitando il segno guardando direttamente al verso della forza elastica rispetto al nostro sistema di riferimento.

Troviamo quindi la costante elastica della molla:

$$k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{0.050 \cdot 9.81}{0.01} = 49\, N/m$$

Sappiamo che la dipendenza tra periodo, costante elastica della molla e massa vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Da cui, invertendo l’equazione, troviamo m:

$$m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 49\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 = 1.24\,kg$$

Esercizio 6 – pendolo

Un orologio a pendolo è installato su una astronave che va sulla luna, la cui accelerazione di gravità è circa 1/6 di quella terrestre. Una volta arrivato sulla luna, quanto tempo impiegano le sfere dell'orologio a compiere un tempo apparente di 12 ore?

SOLUZIONE

Questo esercizio si risolve ricordando che un pendolo semplice si muove di moto periodico, con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dove L è la lunghezza del pendolo e g la gravità sul pianeta.
Spostando un pendolo dalla Terra alla Luna, quello che cambia è l’accelerazione di gravità, che sulla Terra vale $g_T = g$, mentre sulla Luna vale $g_L = g/6$.
Dunque, il periodo del pendolo sulla Terra vale

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Mentre sulla Luna vale:

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g/6}} = \sqrt{6}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{6}\cdot T_T$$

Dunque, tra i periodi di oscillazione del pendolo sulla Terra e sulla Luna c’è un fattore $\sqrt{6}$. 12 ore sulla Terra corrispondono a N oscillazioni del pendolo. Sulla Luna un tempo apparente di 12 ore sarà sempre scandito dallo stesso numero N di oscillazioni, che però avverranno in un tempo

$$t = 12h\cdot\sqrt{6} = 29.29\;h = 29\;h\;17\;min\;24\;sec$$