Fisica per Farmacia A.A. 2018/2019

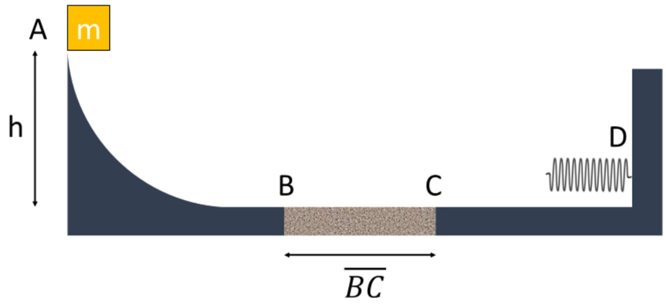
Responsabile del corso: Prof. Alessandro Lascialfari

Tutor (16 ore): Matteo Avolio

Lezione del 15 /04/2019 – 2 h (13:30-15:30, Aula G10, Golgi) - **SOLUZIONI**

ESERCITAZIONI – ENERGIA E LAVORO

Esercizio 1
Un blocco di 10 Kg è lasciato libero nel punto A della pista ABCD in figura, ad altezza h=3 m. La guida è priva di attrito fatta eccezione per il tratto BC lungo 6 m. Il blocco scende lungo la guida, colpisce una molla di costante elastica k = 2250 N/m e ne determina una compressione di 0.3 m rispetto alla lunghezza di equilibrio, prima di fermarsi. Determinare il coefficiente di attrito del tratto BC.



SOLUZIONE

Risolviamo il problema applicando la conservazione dell'energia lungo ciascun tratto. Fissiamo un sistema di riferimento con quota y=0 a livello del piano.

Nel tratto A-B non sono presenti forze non conservative, dunque l'energia meccanica si conserva. In A il corpo è fermo e possiede solo energia potenziale gravitazionale. In B il corpo ha raggiunto quota 0 (in base alla nostra scelta del sistema di riferimento), dunque la sua energia potenziale gravitazionale è nulla, ma adesso è in moto e possiede un'energia cinetica:

$$E_{mec_A} = E_{mec_B}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = 2gh$$

Teniamo questo risultato da parte, e andiamo a considerare il tratto B-C. Qui agisce la forza di attrito non conservativa, che compirà un lavoro negativo sul corpo diminuendone l'energia che è solo cinetica sia in B che in C:

$$\Delta E_{mec} = L_{F_{att}}$$

Dove

$$L_{F_{att}} = \overrightarrow{F_{att}} \cdot \vec{S} = F_{att}\, S\, \cos\vartheta$$

L'angolo ϑ tra forza di attrito e spostamento vale $\vartheta = 180°$, mentre lo spostamento S è uguale alla lunghezza del tratto BC, dunque:

$$L_{F_{att}} = \mu N\, \overline{BC}\, \cos 180° = -\mu mg\, \overline{BC}$$

Riscriviamo la variazione dell'energia meccanica:

$$E_{mec_C} - E_{mec_B} = L_{F_{att}}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu mg\,\overline{BC}$$

$$v_C^2 = v_B^2 - 2\mu g\,\overline{BC}$$

Sostituiamo a v_B^2 il valore trovato in precedenza ($v_B^2 = 2gh$):

$$v_C^2 = 2gh - 2\mu g\,\overline{BC}$$

Teniamo questo risultato da parte e consideriamo il tratto C-D. DI nuovo non agiscono forze non conservative, quindi l'energia si conserva. Il corpo si fermerà comprimendo la molla, quindi tutta l'energia cinetica in C si trasformerà in energia potenziale elastica della molla, inizialmente a riposo:

$$E_{mec_C} = E_{mec_D}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$mv_C^2 = k\Delta x^2$$

Sostituiamo il valore di v_C^2 trovato in precedenza:

$$m(2gh - 2\mu g\,\overline{BC}) = k\Delta x^2$$

$$2m\mu g\,\overline{BC} = 2mgh - k\Delta x^2$$

$$\mu = \frac{2mgh - k\Delta x^2}{2mg\,\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9.81 \cdot 3 - 2250 \cdot (0.3)^2}{2 \cdot 10 \cdot 9.81 \cdot 6} = 0.33$$

NOTA

Ovviamente, è possibile applicare la conservazione dell'energia direttamente tra i punti A e D, stando attenti al fatto che la forza di attrito compie lavoro nel tratto B-C!

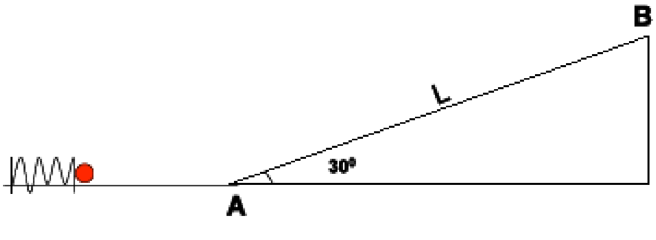
$$E_{mec_D} - E_{mec_A} = L_{F_{att}}$$

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mgh = -\mu mg\,\overline{BC}$$

$$\mu = \frac{mgh - \frac{1}{2}k\Delta x^2}{mg\,\overline{BC}} = \frac{2mgh - k\Delta x^2}{2mg\,\overline{BC}}$$

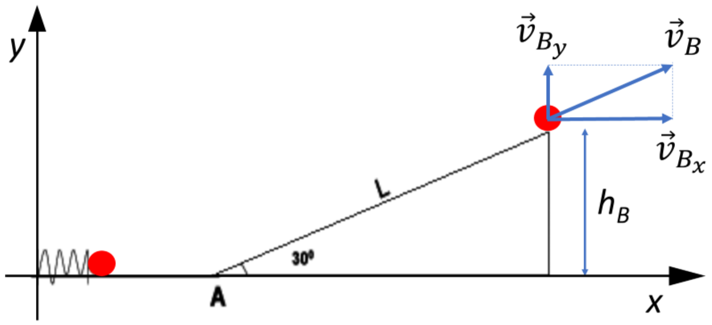
Esercizio 2

Un corpo di massa m = 500 g poggia su un piano orizzontale perfettamente liscio, contro una molla di costante elastica k = 2000 N/m. La molla è compressa di un tratto d = 10 cm rispetto alla sua lunghezza a riposo. Determinare il tempo impiegato dal corpo a raggiungere il punto di massima altezza dopo che ha lasciato il piano inclinato liscio di lunghezza L = 3 m ed inclinato di un angolo θ = 30° rispetto alla direzione orizzontale come mostrato in figura.



SOLUZIONE

Le forze in gioco sono tutte conservative. Si può quindi applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica per ricavare la velocità del corpo nel punto B, ovvero in cima al piano inclinato la cui altezza la indichiamo con h_B:



$$m = 500\ g = 0.500\ kg$$
$$k = 2000\ N/m$$
$$d = 10\ cm = 0.10\ m$$
$$L = 3\ m$$
$$\theta = 30°$$

Dunque:

$$h_B = 3\ m \cdot \sin 30° = 1.5\ m$$

$$t = ?$$

$$E_{mec_i} = E_{mec_B}$$

All'inizio l'energia è tutta potenziale elastica (E_{el}), dal momento che la molla è compressa e il corpo è fermo a quella che abbiamo fissato come quota 0. In B invece la molla è ormai a riposo, mentre il corpo si muove con velocità v_B, dunque ha energia cinetica K_B, e si trova ad altezza h_B, dunque ha energia potenziale gravitazionale E_{pot_B}:

$$E_{el} = E_{pot_B} + K_B$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kd^2 - mgh_B\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}d^2 - 2gh_B} = \sqrt{\frac{2000}{0.5}0.1^2 - 2 \cdot 9.81 \cdot 1.5}\ \frac{m}{s} = 3.25\ m/s$$

Applichiamo quindi la cinematica del moto parabolico. Per trovare il tempo impiegato a raggiungere la massima altezza, scomponiamo la velocità v_B e troviamo la componente lungo y:

$$v_{B_y} = v_B \sin\theta = 3.25 \sin 30° \frac{m}{s} = 1.63\ m/s$$

La velocità lungo y evolve secondo la legge oraria:

$$v_y(t) = v_{B_y} - gt$$

Nel punto di altezza massima $v_y = v_{h_{max}} = 0\ m/s$. Quindi:

$$0 = v_{B_y} - gt$$

$$t = \frac{v_{B_y}}{g} = \frac{1.63\ m/s}{9.81\ m/s^2} = 0.17\ s$$

Esercizio 3 – forza gravitazionale

Un satellite di massa m = 6200 kg segue un orbita circolare di raggio R = $33 \cdot 10^3$ km intorno alla Terra. Ricordando che la massa della Terra è di $5.97 \cdot 10^{24}$ kg e che la costante gravitazionale vale G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ $m^3/(kg \cdot s^2)$, determinare:

a) la velocità del satellite;

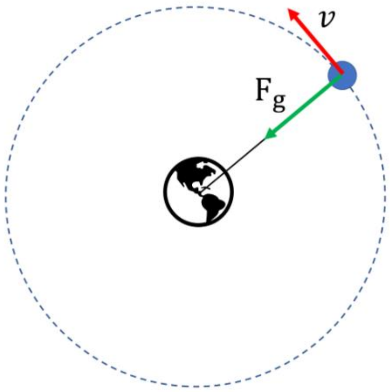
b) il periodo di rotazione intorno alla Terra;

c) l'energia meccanica (cinetica + potenziale) del satellite.

[ricordarsi che l'energia potenziale nel caso di gravitazione universale riferita a un corpo di massa m in interazione con la Terra, vale $-mGM_T/R$]

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente il problema:



$$m = 6200\ kg$$
$$M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\ kg$$
$$R = 33 \cdot 10^3\ km = 3.3 \cdot 10^7\ m$$
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$$
$$v = ?$$
$$T = ?$$
$$E_{mec} = ?$$

a. Notiamo che il satellite si muove di moto circolare uniforme, il quale richiede la presenza di una forza centripeta. Nel presente caso, la forza centripeta è data dalla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra sul satellite, dunque:

$$F_g = F_c$$
$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{(6.67 \cdot 10^{-11})(5.97 \cdot 10^{24})}{3.3 \cdot 10^7}}\frac{m}{s} = 3474\frac{m}{s} \approx 3.5\ km/s$$

b. Per un moto circolare, il periodo è legato alla velocità angolare ω dalla relazione $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
La velocità angolare è invece legata alla velocità tangenziale trovata al punto a dalla relazione $\omega = \frac{v}{R}$. Dunque, unendo le due relazioni:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(3.3 \cdot 10^7)}{3474}s = 59685\ s \approx 16.6\ h$$

c. Il satellite si trova a una distanza R dalla Terra, dunque possiede un'energia potenziale associata alla forza di attrazione gravitazionale. Inoltre, il satellite si muove con velocità tangenziale v, dunque possiede un'energia cinetica.

$$E_{mec} = U_g + K = -G\frac{mM_T}{R} + \frac{1}{2}mv^2$$

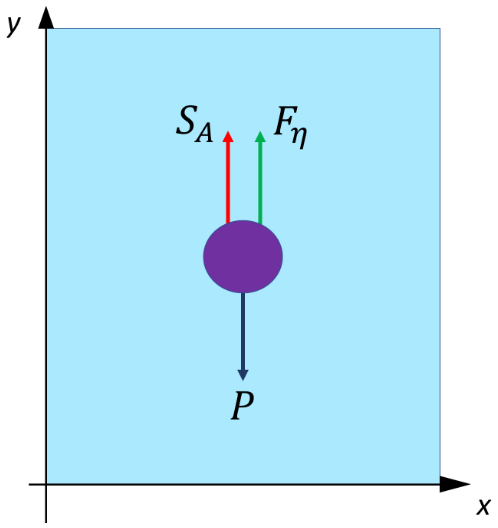
$$E_{mec} = -(6.67 \cdot 10^{-11})\frac{6200\ (5.97 \cdot 10^{24})}{3.3 \cdot 10^7}\ J + \frac{1}{2}6200 \cdot (3474^2)\ J = -3.74 \cdot 10^{10}\ J$$

ESERCITAZIONI – FLUIDI

Esercizio 4 – forza di Archimede e attrito viscoso
Si calcoli il coefficiente di viscosità η di un liquido sapendo che la sua densità è $\rho_L = 1\ g/cm^3$ e che un corpo sferico con raggio $r = 0.1\ mm$ e densità $\rho_C = 1.1\ g/cm^3$ completamente immerso scende con velocità costante di 5 cm in 22.7 s.

SOLUZIONE

Disegniamo tutte le forze agenti sul corpo e fissiamo un sistema di riferimento x-y. Le forze in gioco sono la forza peso, la spinta di Archimede (S_A) e l'attrito viscoso (F_η).



$$\rho_L = 1\frac{g}{cm^3} = 1000\ kg/dm^3$$

$$r = 0.1\ mm = 10^{-4}\ m$$

$$\rho_C = 1.1\frac{g}{cm^3} = 1100\ kg/m^3$$

$$y = 5\ cm = 0.05\ m$$

$$t = 22.7\ s$$

$$\eta = ?$$

Applichiamo il secondo principio della dinamica lungo y, ponendo $a_y = a = 0$ dal momento che il corpo si muove lungo y con velocità costante:

$$\sum F_y = 0$$

$$S_A + F_\eta - P = 0$$

$$V_{imm}\rho_L g + 6\pi\eta r v - mg = 0$$

$$V\rho_L g + 6\pi\eta r v - V\rho_C g = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_L g + 6\pi\eta r\frac{y}{t} - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_C g = 0$$

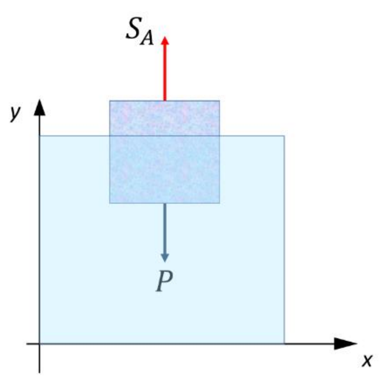
$$\eta = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_C g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_L g}{6\pi r\frac{y}{t}}$$

$$\eta = \frac{2t}{9y}r^2 g(\rho_C - \rho_L) = \frac{2\cdot 22.7}{9\cdot 0.05}(10^{-4})^2\cdot 9.81\cdot(1100-1000)\frac{kg}{m\cdot s} = 9.9\cdot 10^{-4}\ poise\ \approx 0.001\ poise$$

Esercizio 5
Un cubetto di ghiaccio di lato L= 1 cm è immerso in un bicchiere d'acqua. Dopo un po' di tempo, il ghiaccio si scioglie. Dimostrare che alla fine dello scioglimento del cubetto di ghiaccio non c'è alcuna variazione di altezza dell'acqua nel bicchiere (ovvero, il livello dell'acqua resta invariato durante l'intero processo).

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente il problema e le forze in gioco, ponendo l'asse y positivo verso l'alto:



Sul cubetto di ghiaccio agiscono 2 forze: la spinta di archimede e la forza peso. Durante il galleggiamento la situazione è di equilibrio, dunque:

$$\sum F_y = 0$$
$$S_A - P = 0$$
$$S_A = P$$

$$V_{imm}\rho_a g = V_g \rho_g g$$

dove V_g è il volume dell'intero cubetto di ghiaccio, ρ_g la densità del ghiaccio, V_{imm} il volume immerso del cubetto e ρ_a la densità dell'acqua.

Dalla precedente equazione dsi trova:

$$V_{imm} = V_g \frac{\rho_g}{\rho_a}$$

Esprimiamo la densità del ghiaccio e dell'acqua come:

$$\rho_g = \frac{m_g}{V_g} \qquad \rho_a = \frac{m_a}{V_a}$$

Dove m_g è la massa del cubetto di ghiaccio, m_a la massa di acqua del cubetto sciolto, quindi $m_a = m_g = m$, e V_a il volume di acqua ottenuto dallo scioglimento del cubetto di ghiaccio. Poiché $\rho_g < \rho_a$, ovviamente $V_a < V_g$. Mettiamo queste espressioni nell'equazione precedente:

$$V_{imm} = V_g \frac{\rho_g}{\rho_a} = V_g \frac{\left(\frac{m_g}{V_g}\right)}{\left(\frac{m_a}{V_a}\right)} = V_g \frac{m_g}{V_g}\frac{V_a}{m_a} = V_g \frac{m}{V_g}\frac{V_a}{m} = V_a$$

Ciò significa che il volume di acqua ottenuto dallo scioglimento dell'intero cubetto di ghiaccio andrà ad occupare lo stesso volume immerso del cubetto, e l'altezza dell'acqua nel bicchiere non cambierà.

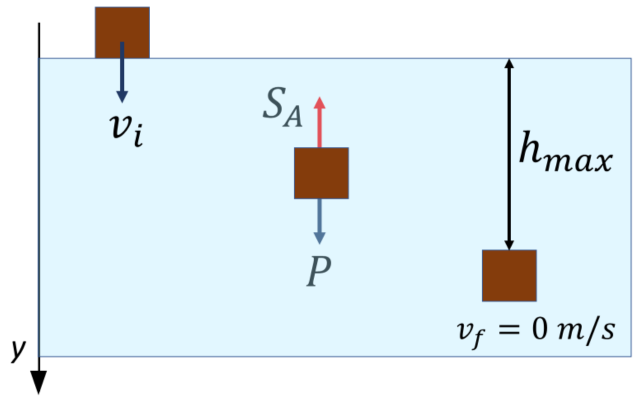
Esercizio 6

Un corpo di densità 700 kg/m^3 cade verticalmente verso il basso con una velocità iniziale di 10 m/s dalla superficie di una piscina piena d'acqua. Considerando l'acqua come un fluido ideale, determinare la pressione, in atmosfere, subita dal corpo alla massima profondità raggiunta.

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente la situazione iniziale, intermedia e finale. Sul corpo di densità $\rho_c = 700\ kg/m^3$ agiscono la forza peso e la spinta di archimede; non c'è attrito viscoso essendo l'acqua assunta come fluido ideale.

Fissiamo l'asse y orientato verso il basso, con quota 0 al livello della superfice. Occorre determinare l'accelerazione del corpo (applicando il secondo principio della dinamica) e poi risolvere un problema di cinematica per trovare il valore della profondità massima.



$$\sum F_y = ma$$

$$P - S_A = ma$$

$$mg - \rho_a V g = ma$$

$$mg - \rho_a \frac{m}{\rho_c} g = ma$$

$$a = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) = 9.81\left(1 - \frac{1000}{700}\right)\frac{m}{s^2} = -4.2\ m/s^2$$

Il corpo decelera durante la caduta; troviamo la profondità massima:

$$\begin{cases} y_f(t) = y_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f(t) = v_i + at \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{max} = 0 + 10t - \frac{1}{2}4.2\,t^2 \\ 0 = 10 - 4.2\,t \end{cases}$$

Dalla seconda equazione troviamo

$$t = \frac{10}{4.2}s = 2.4\ s$$

Dunque

$$h_{max} = 10 \cdot 2.4 - \frac{1}{2}4.2\,(2.4)^2\ m = 11.9\ m$$

Applichiamo la legge di Stevino per trovar la pressione subita dal corpo alla profondità massima:

$$P = P_{atm} + \rho_a g h_{max} = 1.01 \cdot 10^5\ Pa + 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 11.9\ m = 1.01 \cdot 10^5\ Pa + 1.17 \cdot 10^5\ Pa$$
$$= 2.18 \cdot 10^5\ Pa \cong 2.15\ atm$$

(Ricordiamo che 1 $atm \approx 101325\ Pa$)

Esercizio 7

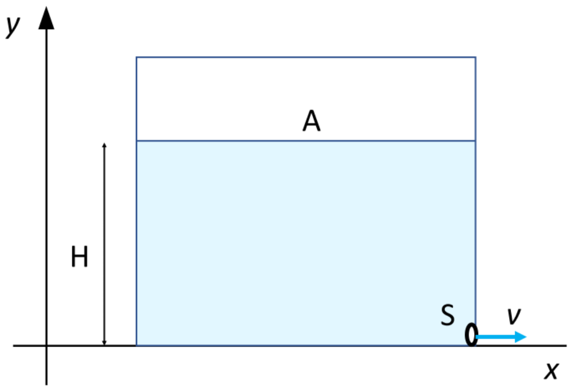
Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha un diametro pari a D = 1 m. Il recipiente contiene acqua ed ha sul fondo un foro di sezione S = 4 cm^2 inizialmente chiuso da un tappo. Quando il tappo viene tolto, l'acqua esce dal foro con una portata pari a Q = 2 litri/s. Calcolare:

a) la velocità con cui l'acqua esce inizialmente dal foro e la velocità dell'acqua in un punto della superficie libera superiore

b) il volume di acqua inizialmente contenuto nel recipiente.

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente la situazione. Poniamo lo zero del nostro sistema di riferimento alla quota del fondo del recipiente:



$$D = 1\,m$$

$$S = 4\,cm^2 = 4 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$Q = 2\frac{L}{s} = 2 \cdot 10^{-3}\,m^3/s$$

a) $v = ?$ $\qquad v_A = ?$

b) $V = ?$

a) Sappiamo la portata dell'acqua attraverso il foro, che vale: $Q = Sv$, e conosciamo S, quindi la velocità dell'acqua che esce dal foro vale:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\,m^3/s}{4 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 5\,m/s$$

Per trovare la velocità dell'acqua sulla superficie superiore, indicata con A, di area:

$$S_A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.785\,m^2$$

applichiamo l'equazione di continuità:

$$Sv = S_A v_A$$

$$v_A = \frac{Sv}{S_A} = \frac{(4 \cdot 10^{-4}\,m^2)(5\,m/s)}{0.785\,m^2} = 2.5 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s} \ll v$$

b) Per calcolare il volume di acqua nel recipiente, ci occorre conoscere l'altezza H del livello dell'acqua. Per farlo, applichiamo il teorema di Torricelli, per cui la velocità dell'acqua che esce dal foro vale

$$v = \sqrt{2gH}$$

Da cui:

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{(5\,m/s)^2}{2 \cdot 9.81\,m/s^2} = 1.27\,m$$

Quindi:

$$V = S \cdot H = 0.785\,m^2 \cdot 1.27\,m = 1.00\,m^3$$