Fisica per Farmacia A.A. 2018/2019

Responsabile del corso: Prof. Alessandro Lascialfari

Tutor (16 ore): Matteo Avolio

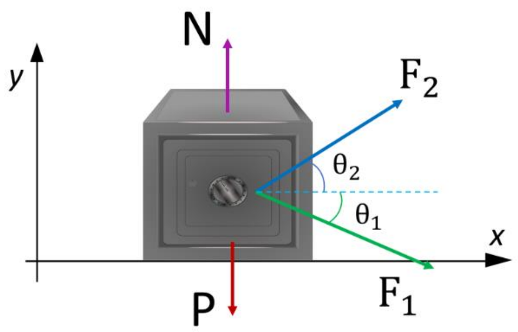
Lezione del 04/04/2019 – 2 h (13:30-15:30, Aula G10, Golgi) **- SOLUZIONI**

ESERCITAZIONI – LAVORO E ENERGIA

Esercizio 1
Due ladri fanno scivolare una cassaforte di 225 kg inizialmente ferma per uno spostamento orizzontale di modulo *d*=8.50 m diretto verso il loro furgone. La forza $\overrightarrow{F_1}$ con la quale il primo ladro spinge la cassaforte è di 12.0 N, e la sua direzione forma un angolo di 30° verso il basso rispetto all'orizzontale. La forza $\overrightarrow{F_2}$ con cui il secondo ladro tira la cassaforte è di 10.0 N, in direzione 40° verso l'alto rispetto alla linea orizzontale. Consideriamo le forze costanti e l'attrito nullo.

a. Quanto vale il lavoro totale svolto dalle due forze sulla cassaforte durante lo spostamento *d*?
b. Qual è il lavoro L_g sviluppato sulla cassaforte dalla sua forza di gravità $\overrightarrow{F_g}$ e il lavoro L_N compiuto dalla forza normale $\overrightarrow{F_N}$ esercitata dal pavimento?
c. La cassaforte era inizialmente ferma. Qual è la sua velocità v_f al termine dello spostamento *d*?

SOLUZIONE
Disegniamo tutte le forze agenti sulla cassaforte (chiamiamo al solito $\overrightarrow{F_N} = \vec{N}$ e $\overrightarrow{F_g} = \vec{P}$):



$$m = 225\ kg$$
$$d = 8.50\ m$$

$$F_1 = 12.0\ N$$
$$\theta_1 = 30°$$

$$F_2 = 10.0\ N$$
$$\theta_2 = 40°$$

a. Troviamo il lavoro svolto dalle due forze F_1 e F_2 applicando la definizione, sapendo l'angolo che esse formano rispetto al vettore spostamento $\vec{d}$:

$$L_1 = \overrightarrow{F_1} \cdot \vec{d} = F_1 d \cos 30° = 12.0\ \cdot 8.50\ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 88.3\ J$$
$$L_2 = \overrightarrow{F_2} \cdot \vec{d} = F_2 d \cos 40° = 10.0\ \cdot 8.50\ \cdot \cos 40° = 65.1\ J$$

E il lavoro totale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 88.3 + 65.1\ J = 153.4\ J$$

b. La forza di gravità $\overrightarrow{F_g} = \vec{P}$ e la forza normale $\vec{N}$ agiscono lungo la direzione perpendicolare allo spostamento, dunque non compiono lavoro:

$$L_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = P\ s \cos 90° = 0\ J$$
$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = N\ d \cos 90° = 0\ J$$

c. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = L_{TOT}$$
$$K_f - K_i = L_{TOT}$$
$$K_f - 0 = L_{TOT}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = L_{TOT}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2L_{TOT}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 153.4}{225}} m/s = 1.17\ m/s$$

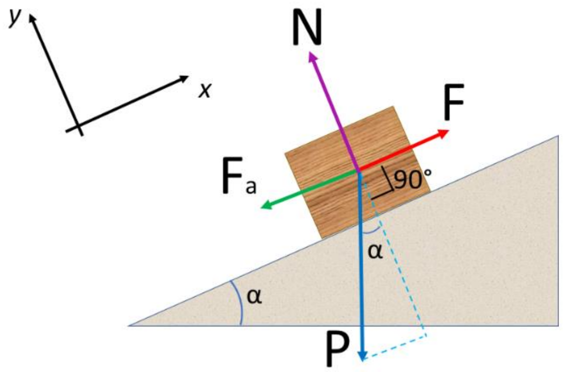
Esercizio 2

Una cassa di massa 10.0 kg viene tirata in salita lungo un piano inclinato scabro con una velocità iniziale di 1.50 m/s. La forza esercitata è di 100 N, parallelamente al piano, inclinato di 20° rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico è 0.400, e la cassa viene tirata per 5.00 m.

a. Quanto lavoro viene compiuto dalla forza di gravità?
b. Quanta energia si dissipa per attrito?
c. Quanto lavoro viene svolto dalla forza di 100N?
d. Di quanto varia l'energia cinetica della cassa?
e. Qual è la velocità della cassa dopo essere stata tirata per 5.00 m?

SOLUZIONE

Disegniamo tutte le forze agenti sulla cassa:

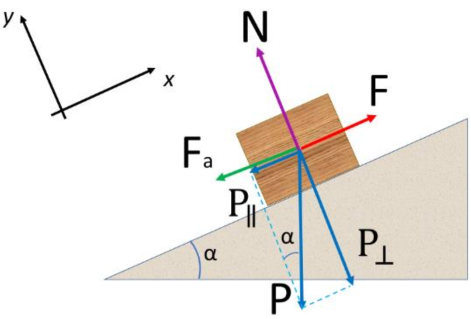


$$m = 10.0\ kg$$
$$s = 5.00\ m$$
$$v_i = 1.50\ m/s$$
$$\alpha = 20°$$
$$\mu = 0.400$$

$$F = 100\ N$$

a. La forza di gravità, o forza peso, è diretta verso il basso, mentre lo spostamento avviene lungo il piano inclinato. L'angolo compreso tra il vettore spostamento e la forza peso è $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha = 90° + 20° = 110°$, quindi:

$$L_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = P\ s \cos\theta = mg\ s\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 10.0 \cdot 9.81 \cdot 5.00 \cdot \cos 110° = -168\ J$$



È utile notare che l'unica componente della forza peso che compie lavoro è quella parallela al piano inclinato, lungo la direzione dello spostamento. Infatti, si dimostra facilmente che, essendo $\cos 110° = -\sin 20°$ (dalla regola generale $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$) e $P_\parallel = mg \sin 20°$:

$$\begin{aligned} L_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = P\ s\cos\theta = mg\ s\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ = -mg\ s\ \sin\alpha = -(mg\sin\alpha)s = -P_\parallel s \\ = P_\parallel\ s \cos 180° = \vec{P_\parallel} \cdot \vec{s} = L_{P_\parallel} \end{aligned}$$

Si può dunque scegliere indifferentemente se scomporre la forza peso nelle sue componenti e calcolare il lavoro delle due componenti (ovviamente $L_{P_\perp} = 0$) oppure lavorare direttamente con la forza peso. Bisogna calcolare correttamente gli angoli tra i diversi vettori considerati.

b. L'energia dissipata dalla forza di attrito è uguale al lavoro compiuto dalla forza di attrito, che si esercita in verso opposto allo spostamento, quindi:

$$F_a = \mu N = \mu mg \cos\alpha = 0.400 \cdot 10.0 \cdot 9.81 \cdot \cos 20°\, N = 36.9\, N$$
$$L_a = \overrightarrow{F_a} \cdot \vec{s} = F_{att}\, s \cos 180° = -F_{att} s = -36.9\, N \ \cdot 5.00\, m = \, -\, 184\, J$$

c. La forza di 100 N agisce lungo la direzione dello spostamento e in verso concorde, perciò:

$$L_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos 0° = Fs = 100\, N \ \cdot 5.00\, m = \, 500\, J$$

d. La variazione dell'energia cinetica della cassa si calcola applicando il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = L_{TOT}$$
$$\Delta K = L_F + L_P + L_a + L_N$$

Dove $L_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N\, s \cos 90° \ = 0\, J$. Quindi:

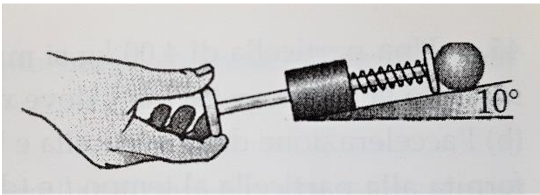
$$\Delta K = (500 - 168 - 184 + 0) J = 148\, J$$

e. Troviamo la velocità finale usando il risultato precedente:

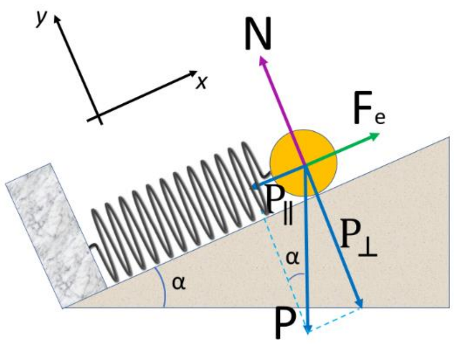
$$\Delta K = K_f - K_i$$
$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$
$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \Delta K + \frac{1}{2} m v_i^2$$
$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\Delta K + \frac{1}{2} m v_i^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{10.0}\left(148 + \frac{1}{2} 10.0 \cdot 1.50^2\right)} \frac{m}{s} = \sqrt{31.85} \frac{m}{s} = 5.64\, m/s$$

Esercizio 3

Il sistema di lancio della pallina di un flipper è costituito da una molla di costante elastica 1.20 N/cm. La superficie su cui si muove la pallina è inclinata di 10.0° rispetto all'orizzontale. Se la molla è inizialmente compressa di 5.00 cm, determinare la velocità con cui viene lanciata la pallina, di massa 100 g, quando abbandona il pistoncino. L'attrito e la massa del pistoncino sono trascurabili.



SOLUZIONE



$$m = 100\, g = 0.100\, kg$$
$$k = 1.20 \frac{N}{cm} = 120\, N/m$$
$$\Delta x = 5.00\, cm = 5.00 \cdot 10^{-2}\, m$$
$$\alpha = 10.0°$$
$$v_f = ?$$

Nel caso della forza elastica, sappiamo che questa non è costante ma varia con l'allungamento/ compressione della molla stessa. Per calcolare il lavoro, si può tuttavia integrare la somma di tanti spostamenti infinitesimi per i quali la forza può essere approssimata come costante, e trovare che, dati l'allungamento iniziale x_i e l'allungamento finale x_f della molla, il lavoro effettuato dalla molla vale:

$$L_m = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

In questo caso $x_i = \Delta x$, mentre $x_f = 0$ una volta che la molla sarà stata rilasciata. Quindi

$$L_m = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}\ 120 \cdot (5.00 \cdot 10^{-2})^2 = 0.15\, J$$

Oltre alla forza elastica, trovandoci su un piano inclinato anche la forza peso compie lavoro, e l'angolo tra spostamento della pallina e forza peso vale $\theta = 90° + \alpha = 90° + 10° = 100°$. Inoltre, poiché siamo interessati alla velocità al momento del rilascio (quando $\Delta x = 0$), lo spostamento lungo il quale consideriamo il lavoro è uguale alla compressione iniziale della molla, cioè $s = \Delta x$. Quindi:

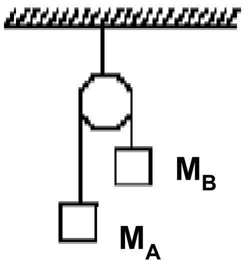
$$\begin{aligned} L_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = P\, s \cos\theta = mg\ \Delta x\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= 0.100 \cdot 9.81 \cdot (5.00 \cdot 10^{-2}) \cdot \cos 100° \\ &= -8.52 \cdot 10^{-3}\, J \end{aligned}$$

La pallina è inizialmente ferma, quindi $v_i = 0\ m/s$ e $K_i = 0\, J$. Per trovare la sua velocità al momento del rilascio, usiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = L_{TOT}$$
$$K_f - K_i = L_m + L_P$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = L_m + L_P$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(L_m + L_P)} = \sqrt{\frac{2}{0.100}(0.15 - 8.52 \cdot 10^{-3})} = 1.68\, m/s$$

Esercizio 4 – carrucola (risolvere usando la conservazione dell'energia)
Il sistema rappresentato in figura è inizialmente a riposo con la massa M_A = 10 kg a terra e la massa M_B = 20 kg ad una altezza h = 10 m da terra. Determinare la velocità con cui la massa M_B tocca terra quando il sistema viene lasciato libero di muoversi.



SOLUZIONE

Questo problema si risolve molto più velocemente usando la conservazione dell'energia piuttosto che le forze. Non ci sono forze non conservative in gioco, quindi l'energia meccanica si conserva.
Fissiamo il consueto sistema di riferimento x-y, con quota zero al livello di terra e il verso positivo di y diretto verso l'alto.

ENERGIA MECCANICA INIZIALE: all'inizio entrambi i corpi sono fermi, quindi la loro energia cinetica è nulla. L'energia potenziale del corpo A, a terra, è nulla, mentre il corpo B che si trova a quota h avrà un'energia potenziale pari a $E_{p_B} = M_B gh$. Dunque:

$$E_{Mec_i} = M_B gh$$

ENERGIA MECCANICA FINALE: un istante prima che il corpo B tocchi terra, sia A che B si stanno muovendo con una certa velocità v che è la stessa per i due corpi, ma diretta in verso opposto: $v_{A_f} = -v_{B_f} = v > 0$.
I due corpi hanno quindi energia cinetica $K_{A_f} = \frac{1}{2} M_A v^2$ e $K_{B_f} = \frac{1}{2} M_B v^2$.
Il corpo B raggiunge terra, quindi la sua energia potenziale si annulla, mentre il corpo A sale ad altezza *h*, e la sua energia potenziale diventa $E_{p_A} = M_A gh$. Dunque:

$$E_{Mec_f} = M_A gh + \frac{1}{2} M_A v^2 + \frac{1}{2} M_B v^2$$

Uguagliamo l'energia meccanica iniziale e finale e troviamo la velocità *v*:

$$E_{Mec_i} = E_{Mec_f}$$

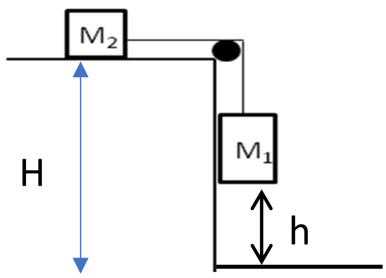
$$M_B gh = M_A gh + \frac{1}{2} M_A v^2 + \frac{1}{2} M_B v^2$$

$$(M_B - M_A) gh = \frac{v^2}{2} (M_A + M_B)$$

$$v = \sqrt{\frac{2(M_B - M_A)gh}{M_A + M_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (20 - 10) \cdot 9.81 \cdot 10}{20 + 10}} = 8.1\ m/s$$

Quindi $v_{B_f} = -v = -8.1\ m/s$.

Esercizio 5 – carrucola (risolvere usando la conservazione dell'energia)
Siano M_1=7 kg e M_2=4 kg le masse di due corpi inizialmente in quiete ed uniti da una fune inestensibile di massa trascurabile come riportato in figura. Il piano orizzontale è scabro con coefficiente di attrito dinamico μ=0.3 e il sistema è lasciato libero di muoversi. Sapendo che il corpo M_1 si trova ad una altezza h=5 m dal suolo, calcolare la velocità con cui M_1 arriva al suolo.



SOLUZIONE

Questo problema si risolve molto più velocemente usando l'energia piuttosto che le forze.
In questo esercizio è presente la forza di attrito, che è non conservativa, dunque per risolverlo usiamo il fatto che la variazione dell'energia meccanica del sistema è uguale al lavoro svolto dalle forze non conservative, in questo caso l'attrito.

$$\Delta E_{Mec} = L_{F_{att}}$$

$$E_{Mec_f} - E_{Mec_i} = L_{F_{att}}$$

Fissiamo il consueto sistema di riferimento x-y, con quota zero al livello di terra e il verso positivo di y diretto verso l'alto.

ENERGIA MECCANICA INIZIALE: all'inizio entrambi i corpi sono fermi, quindi la loro energia cinetica è nulla. L'energia potenziale del corpo 2, che si trova ad un'altezza H (non nota), è $E_{p_2} = M_2 gH$, mentre quella del corpo 1, che si trova a quota *h,* è $E_{p_1} = M_1 gh$. Dunque:

$$E_{Mec_i} = M_2 gH + M_1 gh$$

ENERGIA MECCANICA FINALE: un istante prima che il corpo 1 tocchi terra, entrambi i corpi si stanno muovendo con una certa velocità v che è la stessa per i due corpi ma di segno opposto, in quanto diretta verso le x positive per il corpo 2 e verso le y negative per il corpo 1: $v_{2_f} = -v_{1_f} = v > 0$.
I due corpi hanno quindi energia cinetica $K_{1_f} = \frac{1}{2} M_1 v^2$ e $K_{2_f} = \frac{1}{2} M_2 v^2$.
Il corpo 1 raggiunge terra, quindi la sua energia potenziale si annulla, mentre il corpo 2 rimane ad altezza *H*, mantenendo la sua energia potenziale diventa $E_{p_2} = M_2 gH$. Dunque:

$$E_{Mec_f} = M_2 gH + \frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2$$

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO: in base alla definizione di lavoro, si ha:

$$L_{F_{att}} = \overrightarrow{F_{att}} \cdot \vec{S} = F_{att}\, S\, \cos\vartheta$$

Dove $F_{att} = \mu N = \mu M_2 g$, $S = h$ è lo spostamento del corpo 2, e $\vartheta = 180°$ è l'angolo compreso tra la forza di attrito e il vettore spostamento (opposti). Dunque:

$$L_{F_{att}} = \mu M_2 gh \cos 180° = -\mu M_2 gh$$

Unendo i singoli contributi si ha:

$$E_{Mec_f} - E_{Mec_i} = L_{F_{att}}$$

$$\left(M_2 gH + \frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2\right) - (M_2 gH + M_1 gh) = -\mu M_2 gh$$

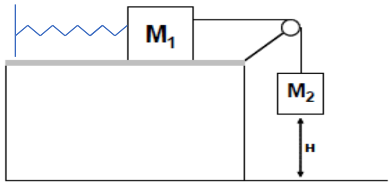
$$\frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{1}{2} M_2 v^2 = M_1 gh - \mu M_2 gh$$

$$v^2 (M_1 + M_2) = 2gh(M_1 - \mu M_2)$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh(M_1 - \mu M_2)}{M_1 + M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 5 \cdot (7 - 0.3 \cdot 4)}{7 + 4}}\, m/s = 7.3\, m/s$$

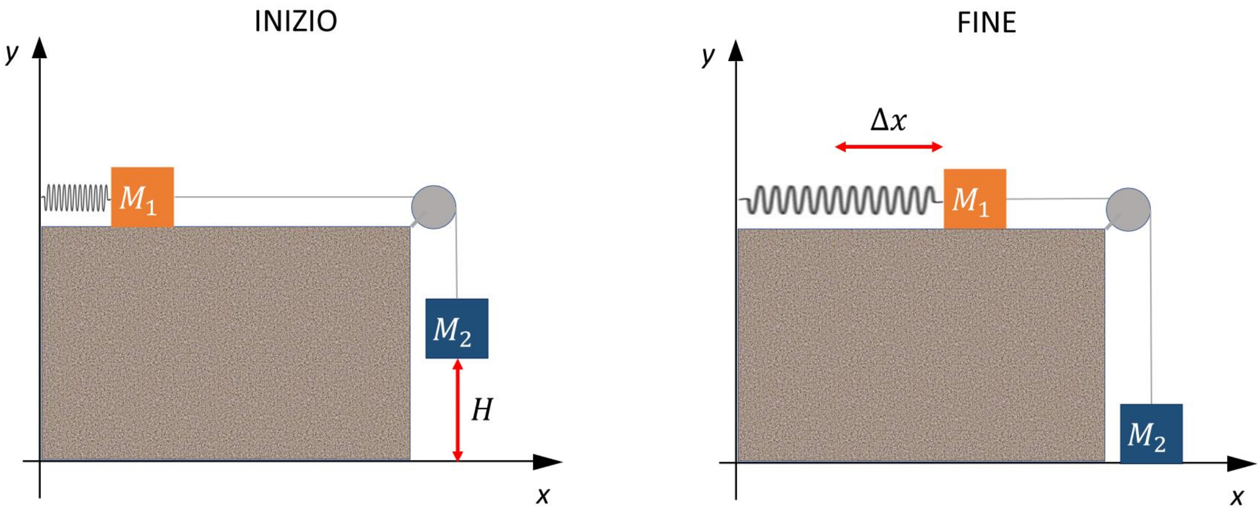
Quindi $v_{1_f} = -v = -7.3\, m/s$.

Esercizio 6 – conservazione dell'energia meccanica
Due corpi sono collegati da una fune inestensibile passante per una carrucola fissa come in figura. Il corpo di massa M_1 = 3 kg si muove su una superficie non liscia orizzontale ed è collegato ad una molla di costante elastica k = 10 N/m. Il sistema è lasciato libero da fermo quando la molla non è deformata. Se il corpo di massa M_2 = 4 kg cade di un tratto H = 3 m prima di essere di nuovo fermo calcolare il coefficiente di attrito dinamico esercitato dalla superficie orizzontale sul corpo M_1 in movimento.



SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente le due situazioni iniziale e finale:



Questo problema si risolve in modo simile all'esercizio precedente.
È presente la forza di attrito, che è non conservativa, dunque la variazione dell'energia meccanica del sistema è uguale al lavoro svolto dalla forza di attrito:

$$\Delta E_{Mec} = L_{F_{att}}$$
$$E_{Mec_f} - E_{Mec_i} = L_{F_{att}}$$

Fissiamo il consueto sistema di riferimento x-y, con quota zero al livello di terra e il verso positivo di y diretto verso l'alto.

ENERGIA MECCANICA INIZIALE: all'inizio entrambi i corpi sono fermi, quindi la loro energia cinetica è nulla. L'energia potenziale del corpo 1, che si trova ad un'altezza *h* (non nota), è $E_{p_1} = M_1 gh$, mentre quella del corpo 2, che si trova a quota *H*, è $E_{p_2} = M_2 gH$. La molla è inizialmente a riposo, dunque la sua energia potenziale elastica è nulla. Dunque:

$$E_{Mec_i} = M_1 gh + M_2 gH$$

ENERGIA MECCANICA FINALE: anche alla fine entrambi i corpi sono fermi, quindi la loro energia cinetica è nulla. Il corpo 2 raggiunge terra, quindi la sua energia potenziale si annulla, mentre il corpo 1 rimane ad altezza *h*, mantenendo la sua energia potenziale diventa $E_{p_1} = M_1 gh$. La molla infine si allunga di una quantità $\Delta x = H$ e acquisisce un'energia potenziale elastica $E_{p_m} = \frac{1}{2} kH^2$ Dunque:

$$E_{Mec_f} = M_1 gh + \frac{1}{2} kH^2$$

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO: in base alla definizione di lavoro, si ha:

$$L_{F_{att}} = \overrightarrow{F_{att}} \cdot \vec{S} = F_{att}\, S\, \cos\vartheta$$

Dove $F_{att} = \mu N = \mu M_1 g$, $S = H$ è lo spostamento del corpo 1, e $\vartheta = 180°$ è l'angolo compreso tra la forza di attrito e il vettore spostamento (opposti). Dunque:

$$L_{F_{att}} = \mu M_1 g H \cos 180° = -\mu M_1 g H$$

Unendo i singoli contributi si ha:

$$E_{Mec_f} - E_{Mec_i} = L_{F_{att}}$$

$$\left(M_1 g h + \frac{1}{2} k H^2\right) - (M_1 g h + M_2 g H) = -\mu M_1 g H$$

$$\frac{1}{2} k H^2 - M_2 g H = -\mu M_1 g H$$

$$\mu M_1 g = M_2 g - \frac{1}{2} k H$$

$$\mu = \frac{M_2 g - \frac{1}{2} k H}{M_1 g} = \frac{4 \cdot 9.81 - \frac{1}{2} 10 \cdot 3}{3 \cdot 9.81} = 0.82$$