Fisica per Farmacia A.A. 2018/2019

Responsabile del corso: Prof. Alessandro Lascialfari

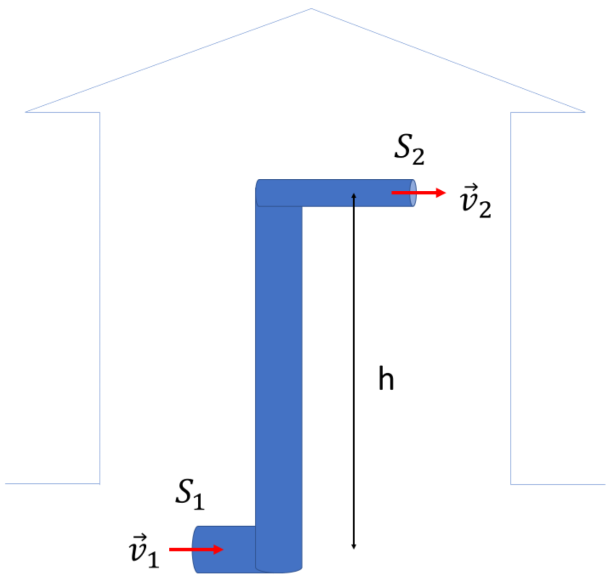
Tutor (16 ore): Matteo Avolio

Lezione del 08/05/2019 – 2 h (13:30-15:30, Aula G10, Golgi)

ESERCITAZIONI – FLUIDI

Esercizio 1
In una casa l'acqua calda circola in un impianto di riscaldamento. Se l'acqua viene pompata ad una velocità di 0.50 m/s attraverso un tubo del diametro di 4.0 cm posto nello scantinato, ad una pressione di 3.0 atm, quali saranno la velocità del flusso e la pressione in un tubo di 2.6 cm di diametro al secondo piano, 5 m sopra?

SOLUZIONE
Rappresentiamo graficamente la situazione:



$$h = 5\ m$$

$$v_1 = 0.50\ m/s$$
$$d_1 = 4.0\ cm = 0.040\ m$$
$$P_1 = 3\ atm = 3.04 \cdot 10^5\ Pa$$

$$d_2 = 2.6\ cm = 0.026\ m$$
$$v_2 = ?\ m/s$$
$$P_2 = ?\ Pa$$

Calcoliamo le sezioni dei diversi tubi:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4}(0.040\ m)^2 = 1.26 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 = \frac{\pi}{4}(0.026\ m)^2 = 5.31 \cdot 10^{-4}\ m^2$$

Applichiamo l’equazione di continuità per trovale la velocità:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{(1.26 \cdot 10^{-3}\ m^2)(0.50\ m/s)}{5.31 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 1.18\ m/s$$

Applichiamo il teorema di Bernoulli per trovare la pressione nel tubo al secondo piano:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con $h_1 = 0\ m$ prendendo un sistema di riferimento con quota zero a livello dello scantinato, quindi:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) - \rho g h_2$$

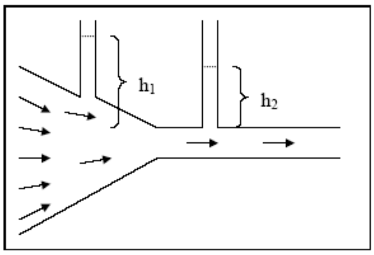
$$P_2 = 3.04 \cdot 10^5\ Pa + \frac{1}{2} 1000(0.50^2 - 1.18^2)\ Pa - 1000 \cdot 9.81 \cdot 5\ Pa = 2.54 \cdot 10^5\ Pa \approx 2.5\ atm$$

Esercizio 2

L'acqua sale alle quote h_1 = 35 cm e h_2 = 10 cm nei due tubi verticali del condotto orizzontale indicato in figura. Il diametro del condotto orizzontale all'altezza del primo tubo è 4 cm, e all'altezza del secondo tubo è 2 cm.

a) Calcolare la velocità dell'acqua nel condotto orizzontale quando è in corrispondenza del primo e del secondo tubo verticale.

b) quanto valgono la portata in massa e la portata in volume?



SOLUZIONE

Dati:

$$h_1 = 35\ cm = 0.35\ m$$
$$h_2 = 10\ cm = 0.10\ m$$
$$d_1 = 4\ cm = 0.04\ m$$
$$d_2 = 2\ cm = 0.02\ m$$

a) Applichiamo il teorema di Bernoulli nei due punti 1 e 2 del condotto:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dove $P_1 = P_2 = P_{atm}$, e si semplificano. Semplificando anche la densità si trova:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g(h_2 - h_1)$$

Per trovare la relazione tra le 2 velocità usiamo l'equazione di continuità:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{\frac{\pi}{4} d_1^2}{\frac{\pi}{4} d_2^2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

Sostituendo v_2 nell'equazione precedente si ottiene:

$$v_1^2 - v_1^2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 = 2g(h_2 - h_1)$$

Quindi:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}} = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81\ m/s^2\ \cdot (0.35\ m - 0.10\ m)}{\left(\frac{0.04\ m}{0.02\ m}\right)^4 - 1}} = 0.572\ m/s$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0.572 \frac{m}{s} \left(\frac{0.04\ m}{0.02\ m}\right)^2 = 2.29\ m/s$$

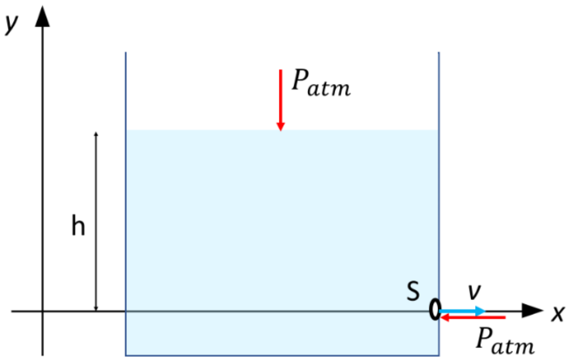
b)

$$Q_V = S_1 v_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} (0.04\ m)^2\ 0.572 \frac{m}{s} = 7.18 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$$

$$Q_m = S_1 v_1 \rho = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 \rho = \frac{\pi}{4} (0.04\ m)^2\ 0.572 \frac{m}{s} 1000 \frac{kg}{m^3} = 0.718\ kg/s$$

Esercizio 3
In un serbatoio pieno d'acqua si apre una falla, di dimensione molto minore rispetto alla sezione del serbatoio. Qual è il modulo della velocità nel caso in cui si trovi 3.2 m al disotto della superficie?
Determinare il modulo della velocità nel caso in cui il serbatoio sia pressurizzato a una pressione di 3·Patm.

SOLUZIONE
Rappresentiamo graficamente il problema.
Poniamo la quota zero del nostro sistema di riferimento a livello della falla.



Nel caso di serbatoio aperto la pressione che si esercita sulla superficie del serbatoio è quella atmosferica, così come sul foro:

$$P_S = P_{atm} \qquad\qquad P_F = P_{atm}$$

Inoltre, poiché il foro è molto più piccolo della sezione, per l'equazione di continuità la velocità dell'acqua sulla superficie (v_S) è molto minore di quella che passa attraverso la falla (v_F): $v_S \ll v_F$. Dunque, possiamo approssimare $v_S \approx 0\ m/s$.

Applichiamo quindi il teorema di Bernoulli tra foro e superficie:

$$P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_F^2$$

E troviamo il risultato dato dal teorema di Torricelli:

$$v_F = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 3.2\ m} = 7.9\ m/s$$

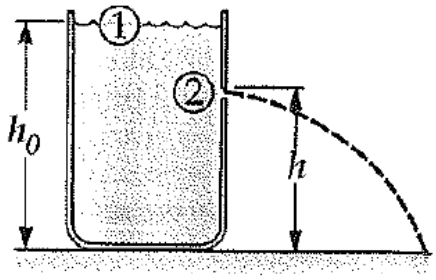
Se il serbatoio è pressurizzato a $P_S = 3P_{atm}$, l'equazione cambia:

$$3P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_F^2$$

Dunque:

$$v_F = \sqrt{\frac{4P_{atm}}{\rho} + 2gh} = \sqrt{\frac{4(1.01 \cdot 10^5\ Pa)}{1000\ kg/m^3} + 2 \cdot 9.81\frac{m}{s^2} \cdot 3.2\ m} = 21.6\ m/s$$

Esercizio 4
Un largo contenitore di raccolta è riempito fino a un'altezza h_0. Il contenitore ha un buco ad altezza h dal fondo. Trovare un'espressione generale che descriva a quale distanza dal contenitore arriva il flusso d'acqua.



SOLUZIONE

Applichiamo il teorema di Bernoulli nei punti 1 e 2 in figura.

$$P_1 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

In entrambi i punti $P_1 = P_2 = P_{atm}$, e si semplificano. Inoltre, essendo ragionevolmente la superficie del contenitore (largo) molto maggiore di quella del buco, $v_1 \approx 0\ m/s$. Semplificando anche la densità si trova:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

Il moto di ogni goccia può ora essere descritto come quello di un proiettile, con velocità v_2 lungo x e componente verticale (lungo y) nulla. Dunque ogni goccia segue la legge oraria lungo y:

$$y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Fissiamo un sistema di riferimento con quota zero a livello del foro, e asse y orientato verso l'alto. Dunque:

$$-h = -\frac{1}{2} g t^2$$

Da cui il tempo di caduta vale:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Lungo x, invece, lo spazio percorso segue la legge oraria:

$$x(t) = x_0 + v_2 t$$

Da cui, fissato $x_0 = 0\ m$, si trova la distanza a cui arriva il flusso rispetto al contenitore:

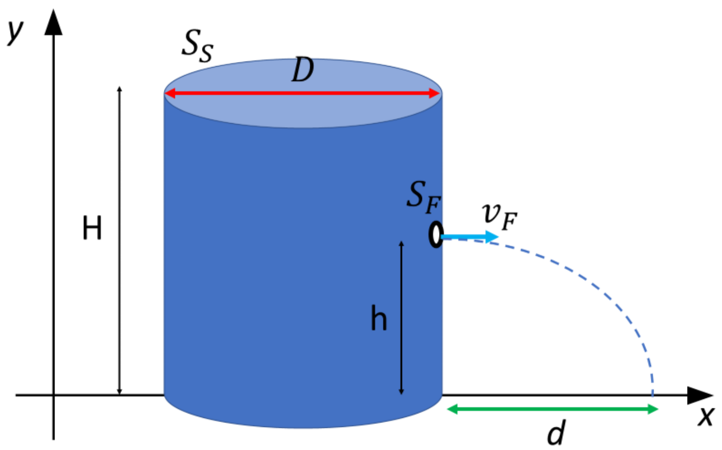
$$d = v_2 t = \sqrt{2g(h_0 - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(h_0 - h)}$$

Esercizio 5

Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha diametro D = 1 m, altezza H ed è interamente riempito d'acqua. Il cilindro ad una distanza di 40 cm dalla base inferiore presenta un piccolo foro, di sezione trascurabile rispetto alla sezione del cilindro, chiuso da un tappo. Tolto il tappo l'acqua fuoriesce dal cilindro cadendo ad una distanza di 1 m dal foro.
Calcolare la massa d'acqua contenuta nel cilindro prima della rimozione del tappo dal foro.

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente la situazione:



$$D = 1\ m$$

$$h = 40\ cm = 0.40\ m$$

$$d = 1\ m$$

$$S_S \ll S_F$$

$$m = ?$$

Per trovare la massa di acqua nel recipiente, ci occorre conoscerne il volume e quindi H. Essendo $S_S \ll S_F$ possiamo applicare il teorema di Torricelli, per cui:

$$v_F = \sqrt{2g(H-h)}$$

Da cui

$$H = h + \frac{v_F^2}{2g}$$

La velocità dell'acqua che esce dal foro possiamo determinarla risolvendo il problema di cinematica (moto parabolico) per cui sappiamo che nello stesso tempo *t* l'acqua percorre un tratto *d* lungo *x,* con velocità costante v_F, e un tratto *h* lungo *y,* partendo con velocità nulla lungo *y* ma sottoposta all'accelerazione di gravità *g*:

$$\begin{cases} d = v_F t \\ h = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.40\ m}{9.81\ m/s^2}} = 0.29\ s$$

E dalla prima:

$$v_F = \frac{d}{t} = \frac{1\ m}{0.29\ s} = 3.5\ m/s$$

Quindi:

$$H = h + \frac{v_F^2}{2g} = 0.40\ m + \frac{\left(3.5\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81\ m/s^2} = 1.02\ m$$

E la massa di acqua nel cilindro vale:

$$m = V\rho = S_S H\rho = \frac{\pi}{4} D^2 H\rho = \frac{\pi}{4}(1\ m)^2 \cdot 1.02\ m \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} = 800\ kg$$

<u>Oppure:</u>

Sfruttiamo la regola generale trovata nell'esercizio 4, per cui:

$$d = \sqrt{4h(H-h)}$$

$$d^2 = 4h(H-h)$$

$$H = \frac{d^2}{4h} + h$$

$$H = \frac{(1\ m)^2}{4(0.40\ m)} + 0.40\ m = 1.025\ m$$

E la massa di acqua nel cilindro vale:

$$m = V\rho = S_S H\rho = \frac{\pi}{4} D^2 H\rho = \frac{\pi}{4}(1\ m)^2 \cdot 1.025\ m \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} = 800\ kg$$

ESERCITAZIONI – TERMODINAMICA

Esercizio 6
Un ferro di cavallo di 1.50 kg inizialmente a 600°C è lasciato cadere in un secchio contenente 20.0 kg di acqua a 25.0°C. Qual è la temperatura finale? Si trascuri il calore specifico del contenitore e si assuma che soltanto una trascurabile quantità di acqua vaporizzi.
(Calori specifici: $c_{Fe} = 448\, J/(kg \cdot °C)$; $c_{H_2O} = 4186\, J/(kg \cdot °C)$).

SOLUZIONE
Quando il ferro rovente entra nell'acqua, trasferirà parte del suo calore all'acqua, raffreddandosi; l'acqua, invece, assorbirà la stessa quantità di calore e aumenterà la sua temperatura. Dunque:

$$Q_{Fe} = -Q_{H_2O}$$
$$m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (T - T_{Fe}) = -\, m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot (T - T_{H_2O})$$

Dove $m_{Fe} = 1.50\ kg$, $T_{Fe} = 600°C$, $m_{H_2O} = 20.0\ kg$, $T_{H_2O} = 25.0°C$ e T è la temperatura finale di equilibrio. Riarrangiando i termini dell'equazione:

$$T(m_{Fe}c_{Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O}) = m_{Fe}c_{Fe}T_{Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O}T_{H_2O}$$

$$T = \frac{m_{Fe}c_{Fe}T_{Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O}T_{H_2O}}{m_{Fe}c_{Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O}} = \frac{1.50\ kg\ \cdot 448\frac{J}{kg \cdot °C} \cdot 600°C + 20.0\ kg\ \cdot 4186\frac{J}{kg \cdot °C} \cdot 25.0°C}{1.50\ kg\ \cdot 448\frac{J}{kg \cdot °C} + 20.0\ kg\ \cdot 4186\frac{J}{kg \cdot °C}}$$

$$= \ 29.6°C$$

Esercizio 7
Un cilindro contiene 0.5 moli di un gas ideale alla temperatura di 37 °C. Determinare la quantità di calore che deve essere fornita al gas per mantenere costante la temperatura, se il gas si espande isotermicamente da un volume iniziale di 0.31 m^3 ad un volume finale di 0.45 m^3.

SOLUZIONE
$n = 0.5\ mol$
$T_A = 37°C = 310\ K$ $\qquad V_A = 0.31\ m^3$
$T_B = T_A = 310\ K$ $\qquad V_B = 0.45\ m^3$

In una trasformazione isoterma $T = cost$, dunque $\Delta E_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -L$
In una trasformazione isoterma di un gas ideale il lavoro può essere calcolato applicando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$L = -\int_{V_i}^{V_f} p\ \mathrm{d}V = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\ \mathrm{d}V = -nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

Quindi:

$$Q = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 0.5\ mol \cdot 8.315\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 310\ K \cdot \ln\frac{0.45}{0.31} = 480\ J$$

Esercizio 8
Due moli di un gas perfetto biatomico sono contenute inizialmente in un volume V_A= 5.5 litri alla pressione P_A= 3 atm. Il sistema subisce successivamente una trasformazione dallo stato iniziale A allo stato finale C composta da una trasformazione isobara AB con $V_B = 3\ V_A$ e da una trasformazione isocora BC con $P_C = 1/3\ P_B$. Si calcoli: a) il calore totale Q_{AC} scambiato nell'intera trasformazione; b) il lavoro totale L_{AC} svolto nell'intera trasformazione.

SOLUZIONE

$n = 2\ mol$

$c_V = \frac{5}{2}R$ $\qquad c_p = \frac{7}{2}R$ $\qquad R = 8.315\ \frac{J}{mol \cdot K}$

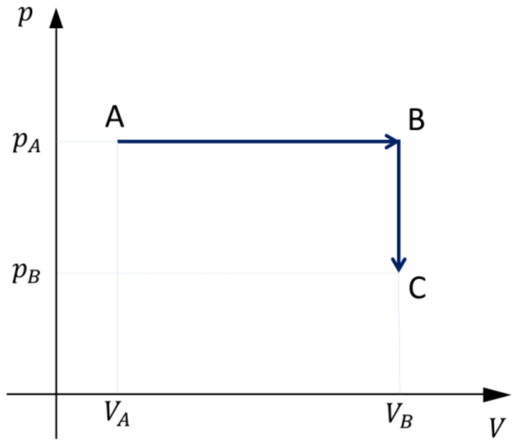
$p_A = 3\ atm = \ 3.04 \cdot 10^5\ Pa$ $\qquad V_A = 5.5\ L = 5.5 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$p_B = p_A = 3.04 \cdot 10^5\ Pa$ $\qquad V_B = 3\ V_A = 16.5 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$p_c = \frac{1}{3}p_B = 1\ atm = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$ $\qquad V_C = V_B = 16.5 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$Q_{AC} = ?$ $\qquad L_{AC} = ?$

Rappresentiamo graficamente le trasformazioni nel piano p(V):



Analizziamo il tratto AB, una trasformazione isobara:

$$L_{AB} = -p\Delta V = -p_A(V_B - V_A) = -p_A(3V_A - V_A) = -2p_AV_A = -2(3.04 \cdot 10^5\ Pa)(5.5 \cdot 10^{-3}\ m^3) = \ -3344\ J$$

$$Q_{AB} = nc_p\Delta T = nc_p(T_B - T_A)$$

Per determinare T_A e T_B applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_AV_A = nRT_A \qquad \rightarrow \qquad T_A = \frac{p_AV_A}{nR} = \frac{(3.04 \cdot 10^5\ Pa)(5.5 \cdot 10^{-3}\ m^3)}{(2\ mol)(8.315\ \frac{J}{mol \cdot K})} = 100.5\ K$$

$$p_BV_B = nRT_B \qquad \rightarrow \qquad T_B = \frac{p_BV_B}{nR} = \frac{(3.04 \cdot 10^5\ Pa)(16.5 \cdot 10^{-3}\ m^3)}{(2\ mol)(8.315\ \frac{J}{mol \cdot K})} = 301.6\ K$$

Quindi:

$$Q_{AB} = nc_p\Delta T = nc_p(T_B - T_A) = 2\ mol \cdot \frac{7}{2}R \cdot (301.6\ K - 100.5\ K) = 11705\ J$$

Analizziamo ora il tratto BC, una trasformazione isocora:

$$V = cost \qquad \rightarrow \qquad L_{BC} = 0\ J$$

$$Q_{BC} = nc_V\Delta T = nc_V(T_C - T_B)$$

Per determinare T_C applichiamo di nuovo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$p_C V_C = nRT_C \qquad \rightarrow \qquad T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{(1.013 \cdot 10^5\ Pa)(16.5 \cdot 10^{-3}\ m^3)}{(2\ mol)(8.315\ \frac{J}{mol \cdot K})} = 100.5\ K$

Dunque $T_C = T_A$, il che ci dice che $\Delta E_{int_{AC}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AC} = -L_{AC}$

$Q_{BC} = nc_V \Delta T = nc_V (T_C - T_B) = 2\ mol \cdot \frac{5}{2} R \cdot (100.5\ K - 301.6\ K) = -8361\ J$

Quindi complessivamente:

$$Q_{AC} = Q_{AB} + Q_{BC} = 11705\ J - 8361\ J = 3344\ J$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} = -3344\ J + 0\ J = -3344\ J = -Q_{AC}$$