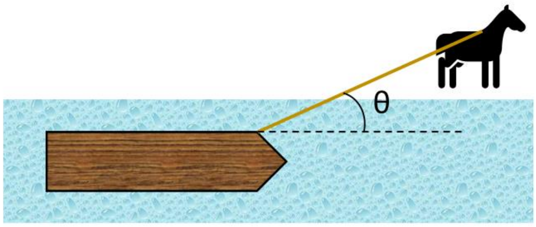
SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUGGERITI DA SVOLGERE INDIVIDUALMENTE

DINAMICA 1 - Esercizio 6

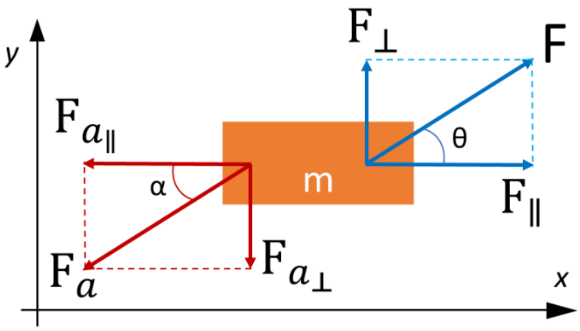
Un cavallo rimorchia una barca in un canale con una forza F di 7900 N sotto un angolo θ di 18° rispetto alla direzione di moto della barca, orientata secondo l'asse del canale. La massa della barca è 9500 kg e l'accelerazione 0.12 m/s^2.
Calcolare il modulo e la direzione della forza esercitata dall'acqua sulla barca.



SOLUZIONE

Capiamo leggendo il problema che la barca si muove di moto rettilineo lungo l'asse del canale. Ciò significa che lungo la direzione perpendicolare al canale la risultante di tutte le forze deve essere pari a zero. Poiché il cavallo spinge la barca con una forza che ha una componente non nulla nella direzione perpendicolare, la resistenza dell'acqua dovrà avere una componente perpendicolare uguale e opposta a quella esercitata dal cavallo.

Sulla base di queste considerazioni, possiamo rappresentare in maniera schematizzata tutte le forze agenti sulla barca, stabilendo un sistema di riferimento x-y i cui versi ci saranno di riferimento per stabilire il segno delle singole forze, e scomponendo ogni forza nelle sue componenti lungo x e lungo y:



$$m = 9500\ kg$$
$$a = 0.12\ m/s^2$$
$$F = 7900\ N$$
$$\theta = 18°$$

Chiamiamo F_a la forza di attrito esercitata dall'acqua, che forma un angolo α rispetto alla direzione -x, e dunque un angolo $\beta = \alpha + 180°$ rispetto alla direzione x (rispetto a cui è dato θ e rispetto alla quale quindi dobbiamo dare la risposta al problema).

Applichiamo il secondo principio della dinamica lungo le due direzioni x e y:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_\parallel - F_{a_\parallel} = ma \\ F_\perp - F_{a_\perp} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\cos\vartheta - F_a\cos\alpha = ma \\ F\sin\vartheta - F_a\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo F_a dalla seconda equazione

$$F_a = F\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha}$$

E la sostituiamo nella prima equazione:

$$F\cos\vartheta - F\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha}\cos\alpha = ma$$

$$F\sin\vartheta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = F\cos\vartheta - ma$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{F\cos\vartheta - ma}{F\sin\vartheta}$$

$$\tan\alpha = \frac{F\sin\vartheta}{F\cos\vartheta - ma}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F\sin\vartheta}{F\cos\vartheta - ma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7900\sin 18°}{7900\cos 18° - 9500\cdot 0.12}\right) = \tan^{-1}(0.38) = 21°$$

Dunque la direzione della forza esercitata dall'acqua forma un angolo β con la direzione orizzontale, pari a:

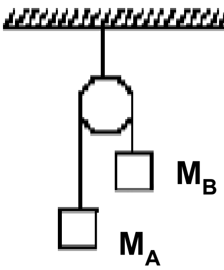
$$\beta = \alpha + 180° = 21° + 180° = 201°$$

Inoltre, il modulo della forza esercitata dall'acqua vale

$$F_a = F\frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha} = 7900\frac{\sin 18°}{\sin 21°} = 6812\ N$$

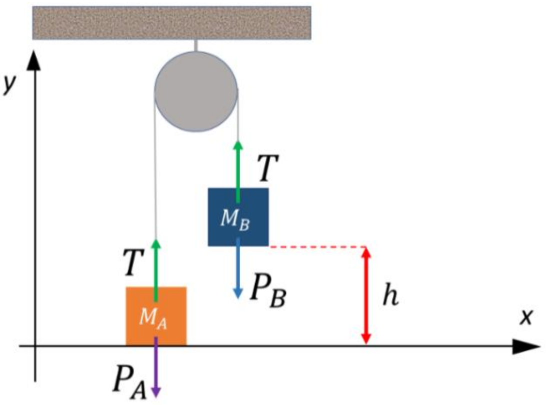
DINAMICA 1 - Esercizio 7

Il sistema rappresentato in figura è inizialmente a riposo con la massa M_A = 10 kg a terra e la massa M_B = 20 kg ad una altezza h = 10 m da terra. Determinare la velocità con cui la massa M_B tocca terra quando il sistema viene lasciato libero di muoversi.



SOLUZIONE

Fissiamo un sistema di riferimento con il verso positivo dell'asse y verso l'alto e quota zero all'altezza di terra, quindi di A. Indichiamo inoltre tutte le forze agenti sui 2 corpi, ovvero le forze peso e la tensione della corda. Ricordiamo che la tensione della corda che agisce sui due corpi è la stessa; la carrucola cambia semplicemente la direzione di applicazione della forza.



$M_A = 10\ kg$

$M_B = 20\ kg$

$h = 10\ m$

$v_{B_f} = ?$

Per il secondo principio della dinamica:

$$\begin{cases} \sum F_A = M_A a_A \\ \sum F_B = M_B a_B \end{cases}$$

Notiamo che essendo i due corpi legati, la loro accelerazione sarà la stessa ma diretta in versi opposti: A sale (accelerazione positiva, visto il verso di y positivo verso l'alto), B scende (accelerazione negativa). Dunque $a_A = -a_B > 0$

Sostituiamo e riscriviamo per esteso il sistema precedente:

$$\begin{cases} T - P_A = -M_A a_B \\ T - P_B = M_B a_B \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo $T = P_A - M_A a_B$

E la sostituiamo nella seconda equazione:

$$P_A - M_A a_B - P_B = M_B a_B$$

$$P_A - P_B = (M_A + M_B)\, a_B$$

Da cui

$$a_B = \frac{P_A - P_B}{M_A + M_B} = \frac{M_A g - M_B g}{M_A + M_B} = g\,\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B} = 9.81\,\frac{10 - 20}{20 + 10}\frac{m}{s^2} = -\,3.27\ m/s^2$$

A questo punto è sufficiente descrivere la caduta di B, che è un problema di cinematica, in particolare un moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} y_f(t) = y_0 + v_{B_0} t + \frac{1}{2} a_B t^2 \\ v_{B_f}(t) = v_{B_0} + a_B t \end{cases}$$

Sappiamo che $y_f = 0\ m$, $y_0 = h$, $v_{B_0} = 0\ m/s$ e $a_B = -3.27\ m/s^2$. Dunque:

$$\begin{cases} 0 = h + \frac{1}{2} a_B t^2 \\ v_{B_f} = 0 + a_B t \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo $t = \sqrt{\frac{-2h}{a_B}} = \sqrt{\frac{-2 \cdot 10}{-3.27}}\,s = 2.47\ s$

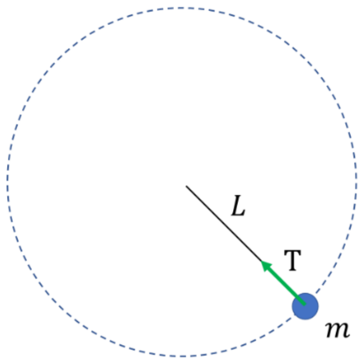
E sostituendo nella seconda:

$$v_{B_f} = a_B t = -3.27 \cdot 2.47\,\frac{m}{s} = -8.1\ m/s$$

DINAMICA 2 - Esercizio 7

Un corpo di massa M = 500 g è fissato ad una fune, di massa trascurabile ed inestensibile, lunga L = 200 cm. Il corpo si muove di moto circolare uniforme su di un piano orizzontale privo di attrito. Sapendo che la fune esercita sul corpo M una tensione T = 158 N calcolare la frequenza del moto del corpo M.

SOLUZIONE



Siamo nel piano orizzontale, quindi la forza peso del corpo (un vettore entrante nel piano del foglio) è bilanciata dalla reazione vincolare del piano (un vettore N uscente dal piano del foglio). Consideriamo perciò solo le forze agenti nel piano

$$M = 500\ g = 0.500\ Kg$$
$$L = 200\ cm = 2\ m$$
$$T = 158\ N$$

$$f = ?$$

Il corpo si muove di moto circolare uniforme. Ciò significa che c'è una forza centripeta che gli permette di compiere questo moto. Evidentemente, la forza centripeta è data dalla tensione della corda, quindi:

$$F_c = T$$

Ricordiamo la definizione di forza centripeta:

$$F_c = Ma_c$$

Dove $a_c = \omega^2 L$ è l'accelerazione centripeta, con ω la frequenza angolare del moto ($\omega = 2\pi/T$) e L il raggio del moto circolare.
Dunque:

$$T = M\omega^2 L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{ML}} = \sqrt{\frac{158}{0.5 \cdot 2}\frac{rad}{s}} = 12.6\,rad/s$$

Poiché $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ si ha:

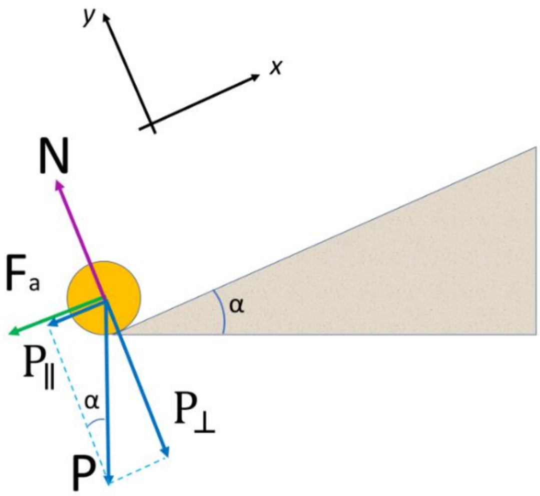
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{12.6}{2\pi}\ s^{-1} = 2.0\ s^{-1} = 2.0\ Hz$$

DINAMICA 2 - Esercizio 8

Un punto materiale viene lanciato dalla base di una rampa scabra, inclinata di 45° e di altezza h=4 m. Calcolare la velocità minima del lancio affinché il punto materiale arrivi sulla sommità della rampa sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra questa e il punto materiale vale $\mu_D = 0.5$.

SOLUZIONE – usando le forze

Per prima cosa fissiamo un sistema di riferimento x-y solidale al piano inclinato, quindi con l'asse x parallelo al piano stesso, con l'origine in corrispondenza del punto di partenza del corpo.



Scomponiamo la forza peso del corpo nelle sue due componenti parallela e perpendicolare al piano:

$$P_\parallel = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

$$P_\perp = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

Il piano inclinato eserciterà una reazione vincolare sul corpo, che per definizione è perpendicolare al piano stesso e quindi in grado di bilanciare la sola componente perpendicolare della forza peso:

$$N - P_\perp = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = P_\perp = mg\cos\alpha$$

(abbiamo applicato il secondo principio della dinamica lungo la direzione y dove l'accelerazione è nulla).

La componente parallela al piano della forza pesa è invece diretta in verso opposto al moto, così come la forza di attrito, ed entrambe contribuiranno ad imprimere al corpo una decelerazione durante la sua salita.

Inoltre, ricordando che $\mu_d = 0.5$ e $\alpha = 45°$, la forza di attrito vale:

$$F_a = \mu N = \mu_d mg\cos\alpha$$

Applichiamo il secondo principio della dinamica lungo la direzione x:

$$\sum F_x = ma$$

$$-P_\parallel - F_a = ma$$

$$-mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = ma$$

La massa (ignota) si semplifica in ogni termine, dunque:

$$a = -g\,(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha) = \; -9.81(\sin 45° + 0.5\cos 45°)\frac{m}{s^2} = \; -9.81\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{m}{s^2}$$
$$= -10.4\; m/s^2$$

A questo punto, trattiamo il problema come un semplice problema di cinematica lungo x: moto rettilineo uniformemente accelerato. Quindi:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f(t) = v_0 + at \end{cases}$$

Con $x_0 = 0$ (abbiamo posto l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza del punto di partenza del corpo) e $v_f = 0\; m/s$, in quanto la velocità minima per cui il corpo raggiunge la sommità della rampa è quella tale per cui il corpo si ferma in corrispondenza del punto di massima altezza. Inoltre, lo spazio percorso dal corpo lungo il piano inclinato è uguale a:

$$x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 45°}m = 4\sqrt{2}\; m = 5.66\; m$$

Quindi:

$$\begin{cases} x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ 0 = v_0 + at \end{cases}$$

Dalla seconda equazione: $v_0 = -at$, ricaviamo:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

E la inseriamo nella prima equazione:

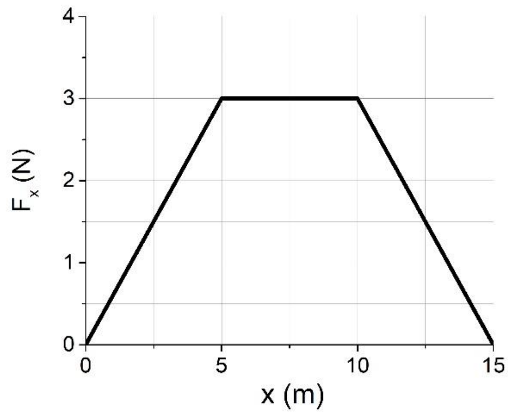
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

$$v_0^2 = -2ax$$

$$v_0 = \sqrt{-2ax} = \sqrt{-2 \cdot (-10.4) \cdot 5.66}\frac{m}{s} = \sqrt{117.7}\frac{m}{s} = 10.8\, m/s$$

ENERGIA E LAVORO - Esercizio 8

Una particella è soggetta a una forza F_x che varia con la posizione come in Figura. Trovare il lavoro svolto dalla forza sulla particella quando si muove (a) da x=0 a x=5.00 m, (b) da x=5.00 m a x=10.0 m e (c) da x=10.0 m a x=15.0 m. (d) Qual è il lavoro svolto dalla forza lungo lo spostamento da x=0 a x=15.0 m?



SOLUZIONE

La definizione generale di lavoro in una dimensione è $L = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$, cioè rappresenta l'area sottesa dalla funzione $F_x(x)$. Questo problema si risolve quindi calcolando l'area descritta dai triangoli/rettangoli/trapezi contenuti in figura.

(a) da x=0 a x=5.00 m $\quad L_a = \frac{(3.00\,N)(5.00m)}{2} = 7.50\,J$

(b) da x=5.00 m a x=10.0 m $\quad L_b = (3.00\,N)(5.00m) = 15.0\,J$

(c) da x=10.0 m a x=15.0 m $\quad L_c = \frac{(3.00\,N)(5.00m)}{2} = 7.50\,J$

(d) Il lavoro totale è dunque: $\quad L_{TOT} = L_a + L_b + L_c = (7.50 + 15.0 + 7.50)\,J = 30.0\,J$

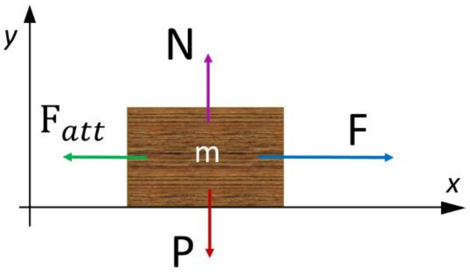
ENERGIA E LAVORO - Esercizio 9

Una cassa di 40.0 kg inizialmente ferma viene spinta per 5.00 m lungo un pavimento orizzontale scabro con una forza orizzontale costante di 130 N. Se il coefficiente di attrito tra cassa e pavimento è 0.300, determinare

a. Il lavoro compiuto dalla forza applicata

b. L'energia dissipata per attrito
c. Il lavoro compiuto dalla forza normale
d. Il lavoro compiuto dalla gravità
e. La variazione di energia cinetica della cassa
f. La velocità finale della cassa.

SOLUZIONE
Disegniamo tutte le forze agenti sulla cassa:



$$m = 40.0\ kg$$
$$s = 5.00\ m$$
$$\mu = 0.300$$
$$F = 130\ N$$

a. Troviamo il lavoro compiuto dalla forza F notando che agisce lungo la direzione del moto:
$$L_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos 0° = Fs = 130\ N\ \cdot 5.00\ m = 650\ J$$

b. L'energia dissipata dalla forza di attrito equivale al lavoro compiuto dalla forza di attrito, che agisce in verso opposto al moto, quindi:
$$F_{att} = \mu N = \mu mg = 0.300 \cdot 40.0\ \cdot 9.81\ N = 117.6\ N$$
$$L_{att} = \overrightarrow{F_{att}} \cdot \vec{s} = F_{att}\, s\cos 180° = -F_{att}s = -117.6\ N\ \cdot 5.00\ m = -588\ J$$

c. La forza normale N agisce in direzione perpendicolare allo spostamento, quindi:
$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N\ s\cos 90° = 0\ J$$

d. Il lavoro compiuto dalla gravità equivale al lavoro svolto dalla forza peso P della cassa, che agisce anch'essa in direzione perpendicolare allo spostamento, perciò:
$$L_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = P\ s\cos 90° = 0\ J$$

e. Per trovare la variazione di energia cinetica della cassa, notiamo che la cassa parte da ferma (v_i = 0 m/s, dunque l'energia cinetica iniziale è nulla: $K_i = 0\ J$) e termina con una velocità finale v_f. Potremmo dunque trovare v_f, oppure più semplicemente applicare il teorema dell'energia cinetica, per cui:
$$\Delta K = L_{TOT}$$
$$\Delta K = L_F + L_{att}$$
$$\Delta K = 650\ J - 588\ J = 62.0\ J$$

f. Poiché $\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = K_f = 62.0\ J$, e $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, si trova:
$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 62.0}{40.0}}\ m/s = 1.76\ m/s$$

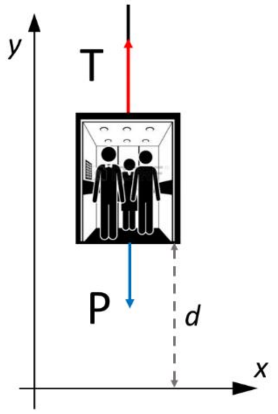
ENERGIA E LAVORO - Esercizio 10

La cabina di un ascensore di massa m=500 kg sta scendendo con velocità di modulo v_i=4.0 m/s, quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandola cadere per una distanza d=12 m con un'accelerazione costante verso il basso $\vec{a} = \vec{g}/5$.

a. Durante la sua caduta, qual è il lavoro sviluppato sulla cabina dalla forza gravitazionale?
b. Quale invece il lavoro sviluppato sulla cabina dalla forza di trazione diretta verso l'alto esercitata dal cavo dell'ascensore?

c. Qual è il lavoro totale sviluppato sulla cabina durante la caduta?
d. Qual è l'energia cinetica della cabina alla fine della caduta?

SOLUZIONE
Rappresentiamo graficamente il problema e le forze in gioco:



$$m = 500\ kg$$
$$d = 12\ m$$
$$v_i = -4.0\ m/s \text{ (verso le y negative)}$$

Avendo scelto l'asse y con verso positivo verso l'alto, l'accelerazione dell'ascensore in caduta è negativa:

$$a = -\frac{g}{5} = -\frac{9.81}{5}\frac{m}{s^2} = -1.96\ m/s^2$$

a. Troviamo il lavoro svolto dalla forza gravitazionale, o forza peso, applicando la definizione e osservando che il moto del corpo avviene lungo la stessa direzione e stesso verso della forza peso:

$$L_P = \vec{P} \cdot \vec{d} = P\,d\cos\theta = mg\,d\ \cos 0° = 500 \cdot 9.81 \cdot 12 = 58860\,J \approx 59\ kJ$$

b. Per trovare il lavoro svolto dalla forza di trazione del cavo dell'ascensore, che agisce in verso opposto al moto di caduta del corpo, dobbiamo prima trovare quanto vale la tensione T. Poiché sappiamo l'accelerazione dell'ascensore (lungo y), usiamo il secondo principio della dinamica lungo y:

$$\sum F_y = ma$$
$$T - P = ma$$
$$T = mg + ma$$
$$T = m(g + a) = 500(9.81 - 1.96)\ N = 3925\ N$$

Il lavoro vale:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = T\,d\cos 180° = -\,T\,d\ = -\,3925 \cdot 12 = -47100\,J \approx -47\ kJ$$

Notiamo che $L_T \neq -L_P$, in quanto a causa dell'accelerazione subita durante la caduta la velocità dell'ascensore cambia e quindi anche la sua energia cinetica.

c. Il lavoro totale sulla cabina è: $L_{TOT} = L_P + L_T = (58860 - 47100)J = 11760\,J\ \approx 12\ kJ$.

d. Possiamo trovare l'energia cinetica a fine caduta sia calcolando la velocità finale dell'ascensore come un problema di cinematica, oppure applicando il teorema dell'energia cinetica:

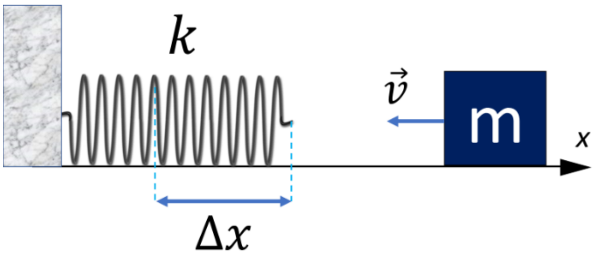
$$K_f - K_i = L_{TOT}$$
$$K_f = K_i + L_{TOT}$$
$$K_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + L_{TOT} = \frac{1}{2}500 \cdot 4.0^2 + 11760\,J = 15760\,J \approx 16\ kJ$$

ENERGIA E LAVORO - Esercizio 11

Un blocco di massa m=0.40 kg scivola, con velocità costante pari a 0.50 m/s, su un piano orizzontale privo di attrito. Il blocco si arresta comprimendo una molla collocata sul suo percorso. La costante elastica della molla è k=750 N/m. Quanto vale la massima compressione della molla?

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente il problema:



$$m = 0.40\ kg$$
$$v_i = -\ 0.50\ m/s$$
$$k = 750\ N/m$$
$$\Delta x = ?$$

Nel caso della forza elastica, sappiamo che questa non è costante ma varia con l'allungamento/ compressione della molla stessa. Per calcolare il lavoro, si può tuttavia integrare la somma di tanti spostamenti infinitesimi per i quali la forza può essere approssimata come costante, e trovare che, dati l'allungamento iniziale x_i e l'allungamento finale x_f della molla, il lavoro effettuato dalla molla vale:

$$L_m = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Nel caso in esame la molla è inizialmente a riposo, quindi $x_i = 0$, mentre $x_f = \Delta x$. Perciò

$$L_m = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

e la forza elastica è l'unica forza che compie lavoro ($L_{TOT} = L_m$).

Nel momento di massima compressione della molla, il corpo sarà fermo, quindi $v_f = 0\ m/s$ e $K_f = 0\ J$. Per il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta K = L_{TOT}$$
$$K_f - K_i = L_{TOT}$$
$$0 - K_i = L_m$$
$$-\frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$
$$mv_i^2 = k\Delta x^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{mv_i^2}{k}} = \sqrt{\frac{0.40 \cdot 0.50^2}{750}}\, m = 0.012\ m = 1.2\ cm$$

ENERGIA E LAVORO/FLUIDI - Esercizio 8

Un corpo di massa m viene lanciato verso l'alto lungo un piano scabro con coefficiente d'attrito dinamico μ_d = 0.3 ed inclinato di un angolo di 45° rispetto alla direzione orizzontale. Se la velocità iniziale del corpo è pari a v_0 = 10 m/s, si determini la massima altezza raggiunta dal corpo.

SOLUZIONE

Il problema può essere risolto facilmente anche utilizzando il teorema dell'energia cinetica, notando che le uniche forze che compiono lavoro sono $\overrightarrow{P_\parallel}$ e $\overrightarrow{F_a}$, che agiscono nella direzione dello spostamento del corpo.

Infatti, per la definizione di lavoro: $L = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta$, con θ l'angolo compreso tra i due vettori.

$\overrightarrow{P_\perp}$ ed $\vec{N}$ sono perpendicolari allo spostamento (agiscono lungo y mentre lo spostamento è lungo x), dunque $\theta = 90°$, $\cos\theta = \cos 90° = 0$ e $L = 0$.

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = \Delta K$$

$$L_{P_\parallel} + L_{F_a} = K_f - K_i$$

Con:

$$L_{P_\parallel} = \vec{P_\parallel} \cdot \vec{x} = mg \sin\alpha \, \frac{h}{\sin\alpha} \cos 180° = -mgh$$

Dove si è indicato lo spostamento x lungo il piano inclinato e lo si è posto pari a $x = \frac{h}{\sin\alpha}$.

Inoltre:

$$L_{F_a} = \vec{F_a} \cdot \vec{x} = F_a \, x \cos 180° = -\mu_d mg \cos\alpha \, \frac{h}{\sin\alpha} = -\frac{\mu_d}{\tan\alpha} mgh$$

Dove si è usata la definizione di forza di attrito: $F_a = \mu N = \mu_d mg \cos\alpha$.

Infine, notiamo che poiché il corpo parte con velocità iniziale $v_0 = 10 \, m/s$ e termina fermo ($v_f = 0 \, m/s$), si ha che l'energia cinetica iniziale e finale valgono:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = 0$$

Mettendo insieme tutti i termini si ottiene:

$$L_{P_\parallel} + L_{F_a} = K_f - K_i$$

$$-mgh - \frac{\mu_d}{\tan\alpha} mgh = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Semplifichiamo la massa e raccogliamo h:

$$hg\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right) = \frac{1}{2} v_0^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} = \frac{10^2}{2 \cdot 9.81 \left(1 + \frac{0.3}{\tan 45°}\right)} \, m = 3.92 \, m$$

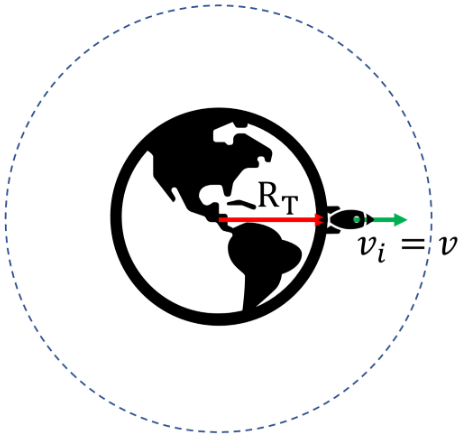
ENERGIA E LAVORO/FLUIDI - Esercizio 9

Un razzo di massa m (costante) si allontana dalla Terra secondo la direzione radiale, mantenendo un'accelerazione costante, anch'essa radiale. Sia v il modulo della sua velocità alla partenza dalla superficie terrestre e sia il doppio a una distanza, dalla superficie, uguale al raggio terrestre. Trovare il lavoro compiuto dal motore del razzo durante il tragitto per raggiungere una distanza dalla superficie pari al raggio terrestre. [R_{Terra}= 6.38 x 10^6 m; M_{Terra} = 5.98 x 10^{24} kg; G = 6.67 x 10^{-11} $m^3/kg\ s^2$]

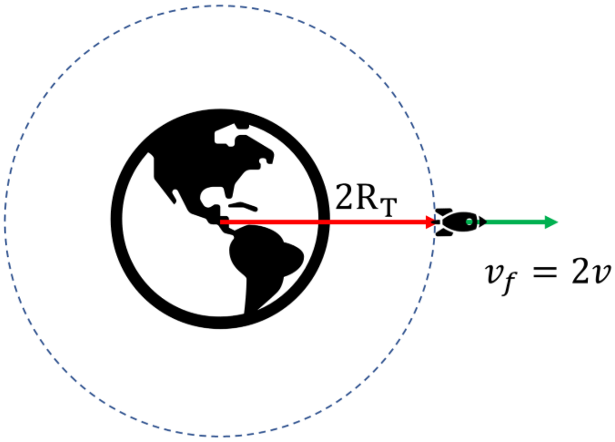
SOLUZIONE

Rappresentiamo la situazione graficamente, alla partenza e all'arrivo a una distanza R dalla Terra.

INIZIO:



FINE:



Sul razzo agisce il motore, il quale compie un lavoro che aumenta l'energia cinetica e potenziale del razzo. Dunque:

$$L_{motore} = \Delta E_{mec}$$

$$L_{motore} = E_{mec_f} - E_{mec_i}$$

$$L_{motore} = \left(U_f + K_i\right) - \left(U_i + K_i\right)$$

$$L_{motore} = \left(-G\frac{mM_T}{2R_T} + \frac{1}{2}mv_f^2\right) - \left(-G\frac{mM_T}{R} + \frac{1}{2}mv_i^2\right)$$

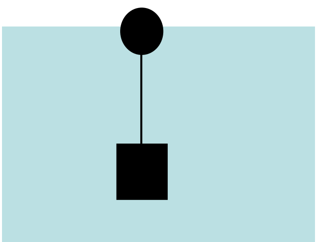
$$L_{motore} = \left(-G\frac{mM_T}{2R_T} + \frac{1}{2}m(2v)^2\right) - \left(-G\frac{mM_T}{R} + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$L_{motore} = -G\frac{mM_T}{2R_T} + 2mv^2 + G\frac{mM_T}{R} - \frac{1}{2}mv^2$$

$$L_{motore} = G\frac{mM_T}{2R_T} + \frac{3}{2}mv^2$$

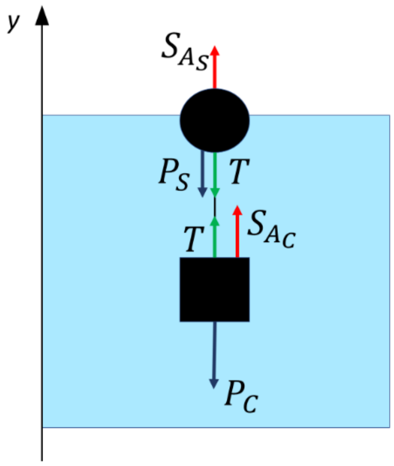
ENERGIA E LAVORO/FLUIDI - Esercizio 10

Una sfera di raggio R = 10 cm e massa M = 500 g, immersa in parte in acqua, sostiene con un filo un cubo di volume $5.2 \cdot 10^{-4}$ m^3 e massa m = 3 Kg. Calcolare il volume della parte di sfera che emerge dall'acqua.



SOLUZIONE

Rappresentiamo tutte le forze agenti sui due corpi: la forza peso, la spinta di archimede e la tensione del filo. Fissiamo un asse y di riferimento verso l'alto.



SFERA:

$$R = 10\ cm = 0.10\ m$$
$$M = 500\ g = 0.500\ kg$$

CUBO:

$$V_C = 5.2 \cdot 10^{-4}\ m^3$$
$$m = 3\ kg$$

ACQUA:

$$\rho_a = 1000\ kg/m^3$$

Calcoliamo il volume totale della sfera:

$$V_S = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(0.10\ m)^3 = 4.2 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Il volume della sfera è parzialmente immerso (V_I) e parzialmente emerso (V_E), quindi: $V_S = V_I + V_E$.
Troviamo il volume immerso sfruttando il fatto che il sistema è in equilibrio, cioè:

$$\sum F_y = 0$$

Che vale sia per la sfera che per il cubo, quindi:

$$\begin{cases} S_{A_S} - P_S - T = 0 \\ S_{A_C} + T - P_C = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione

$$T = S_{A_S} - P_S$$

E la sostituiamo nella seconda:

$$S_{A_C} + S_{A_S} - P_S - P_C = 0$$
$$V_C\rho_a g + V_I\rho_a g - Mg - mg = 0$$
$$V_I = \frac{(M+m)g - V_C\rho_a g}{\rho_a g} = \frac{M+m}{\rho_a} - V_C = \left(\frac{0.500+3}{1000} - 5.2 \cdot 10^{-4}\right) m^3 = 3.0 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Quindi:

$$V_E = V_S - V_I = (4.2 \cdot 10^{-3} - 3.0 \cdot 10^{-3})\ m^3 = 1.2 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

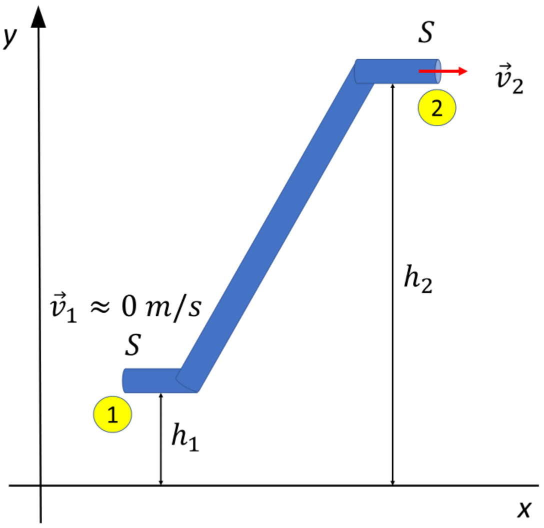
$$V_E = 1.2 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

FLUIDI/TERMODINAMICA - Esercizio 9

Dell'acqua viene pompata da un fiume fino ad un villaggio di montagna attraverso un tubo di diametro d = 15.0 cm. Il fiume è a quota h_1 = 564 m, mentre il villaggio si trova a quota h_2 = 2096 m. Se ogni giorno vengono pompati 4500 m^3 di acqua, quale è la velocità dell'acqua all'interno del tubo? Supponendo che l'acqua scorra nel fiume molto lentamente ($v \approx 0$), quale è la pressione con la quale viene pompata l'acqua dal fiume al villaggio?

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente la situazione:



$$h_1 = 564\ m$$

$$h_2 = 2096\ m$$

$$d = 15.0\ cm = 0.15\ m$$

$$v_1 = 0\ m/s$$

$$Q = 4500\frac{m^3}{day} = \frac{4500}{24 \cdot 60 \cdot 60}\frac{m^3}{s} = 0.052\ m^3/s$$

Calcoliamo la sezione del tubo (costante)

$$S = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(0.15\ m)^2 = 1.77 \cdot 10^{-2}\ m^2$$

Conoscendo la portata, troviamo la velocità dell'acqua attraverso il tubo:

$$v_2 = \frac{Q}{S} = \frac{0.052\ m^3/s}{1.77 \cdot 10^{-2}\ m^2} = 2.95\ m/s$$

Applichiamo quindi il teorema di Bernoulli tra i punti 1 e 2 in figura:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dove $P_2 = P_{atm} = 1.01 \cdot 10^5\ Pa$ e $v_1 = 0\ m/s$. Quindi:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

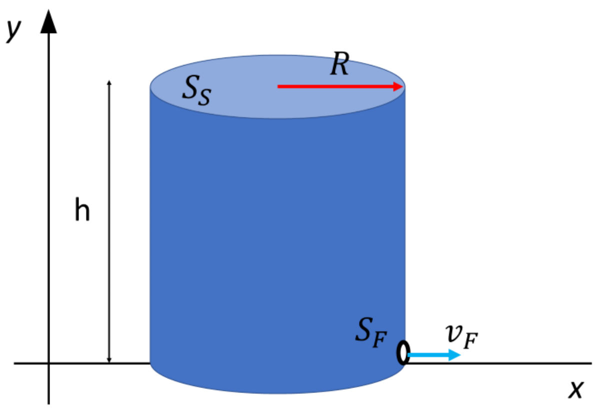
$$P_1 = P_{atm} + \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 = 1.01 \cdot 10^5\ Pa\ + 1000 \cdot 9.81(2096 - 564)\ Pa + \frac{1}{2}1000(2.95)^2 Pa = 15.1 \cdot 10^6\ Pa$$

FLUIDI/TERMODINAMICA - Esercizio 10

Un recipiente cilindrico, aperto superiormente, ha raggio R, altezza h=2m ed è interamente riempito di acqua. In prossimità della base inferiore ha un forellino di sezione circolare di raggio r = 1 cm chiuso da un tappo. Tolto il tappo, il rapporto tra la velocità dell'acqua della superficie libera e quella di efflusso dal forellino è 10^{-4}. Si calcoli, supponendo l'acqua un fluido ideale: (a) il raggio R del recipiente e la massa di acqua contenuta inizialmente nel recipiente; (b) la velocità di efflusso dal forellino giustificando le approssimazioni fatte.
(ρ = massa/volume = densità dell'acqua = 10^3 kg/m^3)

SOLUZIONE
Rappresentiamo graficamente la situazione:



$$h = 2\,m$$

$$r = 1\,cm = 0.01\,m$$

$$\frac{v_S}{v_F} = 10^{-4}$$

$$R = ?$$
$$m = ?$$
$$v_F = ?$$

a) Applichiamo l'equazione di continuità tra la superficie (S) e il foro (F), in quanto la portata si conserva:

$$S_S v_S = S_F v_F$$

$$S_S = S_F \frac{v_F}{v_S} = \pi r^2 \frac{v_F}{v_S} = \pi (0.01\,m)^2 \cdot 10^4 = 3.14\,m^2$$

Dunque il raggio R vale:

$$R = \sqrt{\frac{S_S}{\pi}} = \sqrt{\frac{3.14\,m^2}{\pi}} = 1.00\,m$$

E la massa di acqua contenuta nel recipiente:

$$m = V\rho = S_S h \rho = 3.14\,m^2 \cdot 2\,m \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} = 6.28 \cdot 10^3\,kg$$

b) Poiché $\frac{v_S}{v_F} = 10^{-4}$ è possibile applicare il teorema di Torricelli, dunque:

$$v_F = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 2\,m} = 6.26\,m/s$$

TERMODINAMICA - Esercizio 8

Un recipiente provvisto di stantuffo contiene due moli di gas perfetto biatomico. I valori iniziali della sua pressione e della sua temperatura sono, rispettivamente, 2 atm e 27 °C. Il gas viene lasciato espandere reversibilmente a temperatura costante. Successivamente il gas viene compresso e simultaneamente riscaldato finché non è ritornato al suo volume iniziale. A questo punto la pressione è 2.5 atm. Determinare il calore che andrebbe sottratto al gas per riportarlo nello stato di partenza.

SOLUZIONE

$n = 2\ mol$

$c_V = \frac{5}{2}R$ $\qquad c_p = \frac{7}{2}R$ $\qquad R = 8.315\ \frac{J}{mol\cdot K}$

$p_A = 2\ atm = 2.026\cdot 10^5\ Pa$ $\qquad T_A = 27°C = 300\ K$

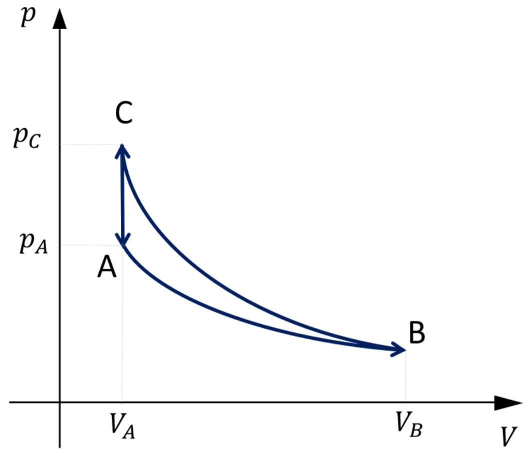
$T_B = T_A$

$V_B > V_A$ $\qquad V_C < V_B$ $\qquad T_C > T_B$ $\qquad V_C = V_A$

$p_C = 2.5\ atm = 2.533\cdot 10^5\ Pa$

$Q_{AC} = ?$

Rappresentiamo graficamente le trasformazioni nel piano p(V):



La trasformazione CA è una isocora, quindi

$V = cost \quad \rightarrow \quad L_{CA} = 0\ J \quad \rightarrow \quad \Delta E_{int_{CA}} = Q_{CA}$

$Q_{CA} = nc_V\Delta T = nc_V(T_A - T_C)$

Per determinare T_C applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$p_C V_C = nRT_C$ $\qquad p_A V_A = nRT_A$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_C V_A}{nR} = \frac{p_C \frac{nRT_A}{p_A}}{nR} = \frac{p_C T_A}{p_A} = \frac{2.5\ atm\ 300\ K}{2\ atm} = 375\ K$$

Quindi:

$$Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = 2\ mol \cdot \frac{5}{2}R\ (300K - 375\ K) = -3116\ J$$

TERMODINAMICA - Esercizio 9

Con un rendimento del 25% una macchina termica compie un ciclo in 0.7 s. Sapendo che in ogni ciclo viene ceduta una quantità di calore Q_{ced} = 1549 J, calcolare quanto tempo è necessario per compiere un lavoro totale pari a 10 kJ.

SOLUZIONE

$$\eta = 0.25$$
$$\Delta t = 0.7\ s/ciclo$$
$$Q_{ced} = 1549\ J = Q_f$$
$$t_{TOT} = ?\ \text{per avere}\ L_{TOT} = 10\ kJ$$

Scriviamo la definizione generale di rendimento di una macchina termica:

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = \frac{|Q_C| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

Dunque:

$$|Q_C| = \frac{|Q_f|}{1-\eta} = \frac{1549\ J}{1-0.25} = 2065\ J$$

E

$$L = \eta|Q_C| = 0.25 \cdot 2065\ J = 516\ J$$

L è il lavoro svolto dalla macchina termica in 1 ciclo. Calcoliamo il numero di cicli necessario per compiere un lavoro $L_{TOT} = 10\ kJ$:

$$N_{cicli} = \frac{L_{TOT}}{L} = \frac{10000\ J}{516\ J} = 19.4\ cicli$$

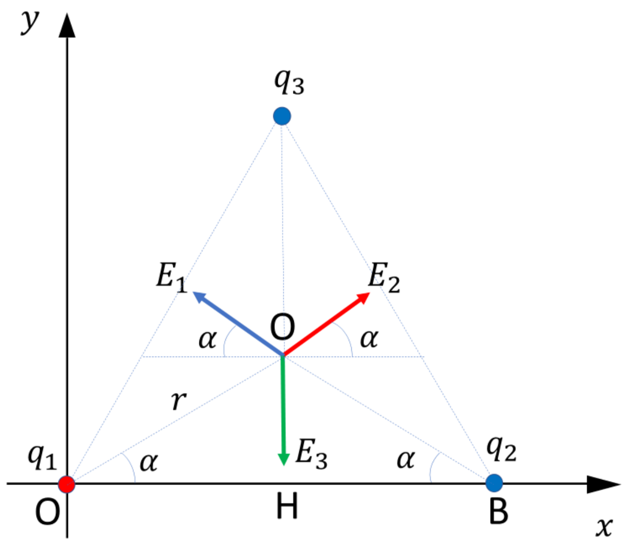
Quindi il tempo totale necessario è:

$$t_{TOT} = N_{cicli} \cdot \Delta t = 19.4\ cicli\ \cdot 0.7 \frac{s}{ciclo} = 13.6\ s$$

TERMODINAMICA/ELETTRICITÀ - Esercizio 5

Tre cariche elettriche uguali $q_1 = q_2 = q_3 = 0.12$ C sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L = 1.7 m. Calcolare il modulo del campo elettrico generato nel baricentro del triangolo.

SOLUZIONE
Rappresentiamo graficamente la distribuzione di cariche



$$q_1 = q_2 = q_3 = q = 0.12\ C$$

$$L = 1.7\ m$$

a) $E_{TOT_0} = ?$ b) $U_{TOT} = ?$

Essendo il triangolo equilatero, il baricentro (punto di incontro delle mediane) coincide con l'incentro (punto di incontro delle bisettrici), dunque l'angolo α indicato in figura vale $\alpha = 30°$.
Calcoliamo la distanza del baricentro O da ogni vertice:

$$r = \frac{L/2}{\cos 30°} = \frac{1.7\ m}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.98\ m$$

Poiché le 3 cariche sono uguali ed equidistanti dal punto O, il modulo dei campi elettrici da loro generati in O è lo stesso:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = k_e \frac{q}{r^2}$$

Notiamo che $\overrightarrow{E_{1_x}} = -\overrightarrow{E_{2_x}}$ e $\overrightarrow{E_{3_x}} = 0$, dunque:

$$\overrightarrow{E_{TOT_x}} = \overrightarrow{E_{1_x}} + \overrightarrow{E_{2_x}} + \overrightarrow{E_{3_x}} = 0$$

Lungo y, invece, $\overrightarrow{E_{1_y}} = \overrightarrow{E_{2_y}}$, in modulo:

$$E_{1_y} = E_{2_y} = E \sin 30° = \frac{E}{2}$$

Inoltre

$$E_{3_y} = E_3 = E$$

Quindi:

$$\overrightarrow{E_{TOT_y}} = \overrightarrow{E_{1_y}} + \overrightarrow{E_{2_y}} + \overrightarrow{E_{3_y}}$$

$$E_{TOTy} = E_{1_y} + E_{2_y} - E_{3_y} = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} - E = 0$$

Come poteva essere già concluso per ragioni di simmetria,

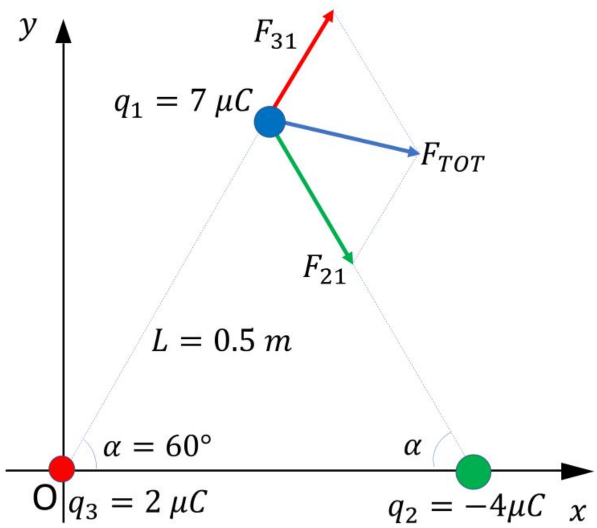
$$E_{TOT} = 0$$

TERMODINAMICA/ELETTRICITÀ - Esercizio 6

Tre cariche puntiformi di 7.00 μC, 2.00 μC e -4.00 μC sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L = 0.500 m. Calcolare la forza elettrica risultante sulla carica di 7.00 μC.

SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente la configurazione di cariche e le forze agenti sulla carica da 7.00 μC, ricordando che cariche opposte si attraggono mentre cariche dello stesso segno si respingono, lungo la loro congiungente:



Calcoliamo i moduli delle due forze:

$$F_{31} = k_e \frac{|q_3||q_1|}{L^2} = \left(9 \cdot 10^9\ \frac{N\ m^2}{C^2}\right) \frac{(2.00 \cdot 10^{-6} C)(7.00 \cdot 10^{-6} C)}{(0.500\ m)^2} = 0.504\ N \approx 0.5\ N$$

$$F_{21} = k_e \frac{|q_2||q_1|}{L^2} = \left(9 \cdot 10^9\ \frac{N\ m^2}{C^2}\right) \frac{(4.00 \cdot 10^{-6} C)(7.00 \cdot 10^{-6} C)}{(0.500\ m)^2} = 1.008\ N \approx 1\ N$$

Scomponiamo le due forze nelle loro componenti lungo x e lungo y:

$$F_{31_x} = F_{31} \cos 60° = 0.5\ N\ \frac{1}{2} = 0.25\ N$$

$$F_{31_y} = F_{31} \sin 60° = 0.5\ N\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.43\ N$$

$$F_{21_x} = F_{21} \cos 60° = 1\ N\ \frac{1}{2} = 0.5\ N$$

$$F_{21_y} = F_{21} \sin 60° = 1\ N\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87\ N$$

Quindi:

$$F_{TOT_x} = F_{31_x} + F_{21_x} = 0.25\ N + 0.5\ N = 0.75\ N$$
$$F_{TOT_y} = F_{31_y} - F_{21_y} = 0.43\ N - 0.87\ N = -0.44\ N$$

$$F_{TOT} = \sqrt{F_{TOT_x}^2 + F_{TOT_y}^2} = \sqrt{0.75^2 + 0.44^3}\ N = 0.87\ N$$

Con un angolo di inclinazione rispetto all'asse x:

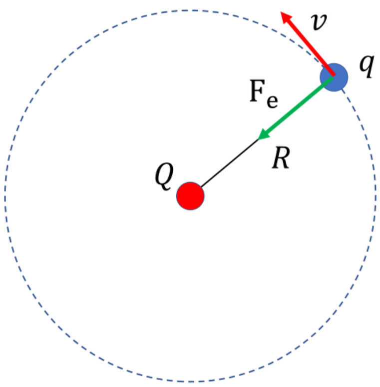
$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{TOT_y}}{F_{TOT_x}} = \tan^{-1}\frac{-0.44}{0.75} = -\ 30°$$

ELETTRICITÀ - Esercizio 8

Una carica positiva Q = 4 10^{-10} C è fissata nell'origine O di un sistema d'assi (x,y) su un piano orizzontale. Una carica q, negativa, pari a -10^{-12} C si muove di moto circolare uniforme nel piano (x,y), lungo una circonferenza di raggio R = 10^{-6} m e centro O, impiegando 3.14 10^{-6} s per percorrere l'intera circonferenza. Si calcoli: a) la massa m della carica q; b) l'energia totale del sistema di cariche q, Q.

SOLUZIONE

L'impostazione del problema è molto simile a quella dell'esercizio 3:



$$Q = 4 \cdot 10^{-10} C$$
$$q = -10^{-12} C$$
$$R = 10^{-6}\ m$$
$$\Delta t = 3.14 \cdot 10^{-6}\ s$$

a) $m = ?$
b) $E_{TOT} = ?$

a) Determiniamo la velocità della carica q sapendo che la circonferenza percorsa nel tempo Δt è:

$$S = 2\pi R = 2\pi \cdot 10^{-6}\ m$$

E dunque:

$$v = \frac{S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot 10^{-6}\ m}{3.14 \cdot 10^{-6}\ s} = 2\ m/s$$

La forza elettrica attrattiva tra le due cariche fornisce la forza centripeta necessaria a compiere il moto circolare:

$$F_e = F_C$$

$$k_e \frac{|q|\,|Q|}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

Quindi ricaviamo la massa

$$m = k_e \frac{q\,Q}{v^2\,R} = \left(9\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\right)\frac{(10^{-12}C)(4\cdot 10^{-10}C)}{\left(2\,\frac{m}{s}\right)^2(10^{-6}\,m)}\,kg = 9\cdot 10^{-7}\,kg$$

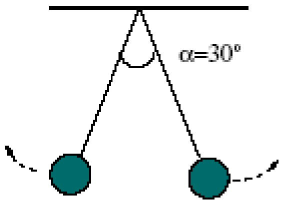
a) L'energia totale è la somma di quella cinetica e potenziale:

$$E_{TOT} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + Vq = \frac{1}{2}mv^2 + k_e\frac{q\,Q}{R^2}$$

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}(9\cdot 10^{-7}\,kg)\left(2\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(9\cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\right)\frac{(-10^{-12}C)(4\cdot 10^{-10}C)}{(10^{-6}\,m)} = 1.8\cdot 10^{-6}J - 3.6\cdot 10^{-6}J$$
$$= -1.8\cdot 10^{-6}J$$

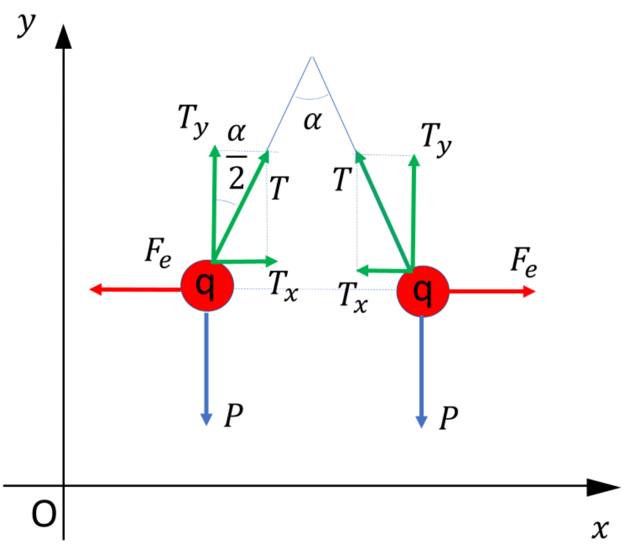
ELETTRICITÀ - Esercizio 9

Due palline, ciascuna di massa m = 10 g, sono sospese agli estremi di due fili lunghi L = 25 cm di massa trascurabile come indicato in figura. Quando le palline vengono caricate con uguali quantità di carica, i fili si divaricano di un angolo α = 30°. Quanto vale la carica di ciascuna pallina?



SOLUZIONE

Rappresentiamo graficamente tutte le forze agenti sulle due palline. Notiamo che la forza elettrica agente sui due corpi è la stessa in modulo, ma opposta in verso:



$$L = 25\,cm = 0.25\,m$$
$$m = 10\,g = 10^{-2}\,kg$$
$$\alpha = 30°$$

$$q = ?$$

Calcoliamo la distanza tra le due cariche:

$$r = 2L \sin\frac{\alpha}{2} = 2(0.25\ m)\sin 15° = 0.13\ m$$

All'equilibrio su ciascuna carica:

$$\vec{F_e} + \vec{T} + \vec{P} = 0$$

Che riscriviamo separatamente per le componenti x e y:

$$\begin{cases} -F_e + T_x = 0 \\ T_y - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_e \dfrac{q^2}{r^2} + T \sin\dfrac{\alpha}{2} = 0 \\ T \cos\dfrac{\alpha}{2} - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$T = \frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

E lo inseriamo nella prima equazione:

$$-k_e \frac{q^2}{r^2} + \frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$-k_e \frac{q^2}{r^2} + mg \tan\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{r^2}{k_e} mg \tan\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{(0.13\ m)^2}{\left(9 \cdot 10^9\ \frac{N\ m^2}{C^2}\right)}(10^{-2}\ kg)\left(9.81\ \frac{m}{s^2}\right)\tan 15°} = \pm 2.22 \cdot 10^{-7} C = \pm 222\ \mu C$$

ELETTRICITÀ - Esercizio 10

Una carica positiva **Q= 0.12 C** è fissata nell'origine **O** di un sistema d'assi (x,y).Una carica negativa **q= -7 10 $^{-2}$ C,** libera di muoversi, viene posta nel punto **B=(0,3 m). (**a) Calcolare modulo, direzione e verso della forza agente sulla carica **q**; (b) Calcolare il lavoro fatto dalle forze del campo quando la carica **q** si sposta da **B** fino ai punti **C=(0, 5 m)** o **D(0, 1 m).**

SOLUZIONE

a) La distanza tra le due cariche è uguale alla distanza $\boldsymbol{r_B}$ della carica **q** dall'origine in cui è posta la carica **Q**. Il modulo della forza agente su **q** è quindi

$$\boldsymbol{F = k\frac{|qQ|}{r_B^2} = 8.39 \cdot 10^6\ N}.$$

La direzione è quella della congiungente le due cariche e quindi è quella dell'asse **y**. La forza è attrattiva e quindi il verso è opposto a quello dell'asse y.

b) Il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica **q** si sposta dalla posizione iniziale alla posizione finale è pari alla differenza tra l'energia potenziale elettrostatica di **q** nella posizione iniziale e quella nella posizione finale, in quanto una distribuzione di cariche stazionarie (ciò che non varia nel tempo) genera un campo di forze elettriche conservativo:

$$L_{BC} = kqQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right) = -1.01\times10^{7}\,J$$

$$L_{BD} = kqQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_D}\right) = +5.03\times10^{7}\,J$$