PROVA DI ESAME SCRITTO DI TERMODINAMICA per l'ammissione alla prova orale
a.a. 2012-2013 Proff. Alessandro Lascialfari e Giorgio Rossi
18 giugno 2014
Scegliere e svolgere 3 esercizi sui 4 proposti

***ESERCIZIO* 1**

Una macchina termica reversibile assorbe una quantità di calore $Q_2 = 2 * 10^5$ J da una sorgente a $T_2 = 973.2$ K, e cede una quantità di calore Q_1 ad una sorgente a temperatura $T_1 = 573.2$ K, e una quantità di calore $Q_3 = Q_1$ ad una sorgente a temperatura $T_3 = 373.2$ K. Calcolare il valore di Q_1, il lavoro totale compiuto ed il rendimento.

ESERCIZIO 2

Il calore specifico a pressione costante del platino, tra 250 K e 1400K, dipende da T in accordo alla relazione empirica : $C_p = (122.3 + 0.03*T + 2.15* 10^5 T^{-2})$ J/KgK. Una massa di 250 g di platino a T_1 =280 K viene posta, mantenendo la pressione costante, in contatto termico con una sorgente a T_2 =1400 K. Calcolare la variazione di entropia ed entalpia del platino, e la variazione di entropia dell'universo.

ESERCIZIO 3

Si consideri una finestra di vetro alta 1.2 m e larga 2 m, il cui spessore è 6 mm e la cui conducibilità termica è $\lambda = 0.78$ [W/(m°C)]. Calcolare: (a) la potenza termica trasmessa attraverso questa finestra in regime stazionario e (b) la temperatura della sua superficie interna in un giorno in cui la temperatura della stanza è mantenuta a 24 °C, mentre la temperatura esterna è -5°C. Si supponga che i coefficienti di scambio termico convettivo della superficie interna e della superficie esterna della finestra siano h_i = 10 [W/(m^2°C)] e h_e = 25 [W/(m^2°C)] rispettivamente, e si trascuri la trasmissione per irraggiamento.

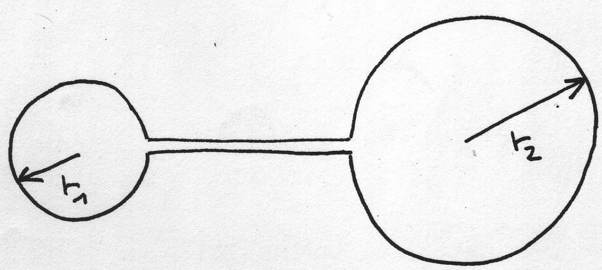
ESERCIZIO 4

Si considerino due bolle di sapone sferiche (tensione superficiale γ) riempite di gas perfetto, collegate da una cannuccia di volume trascurabile che permette il passaggio di gas da una all'altra. Il sistema è in atmosfera alla temperatura T_0 e alla pressione p_0.

a) Scegliere il potenziale termodinamico adatto e le variabili interne per studiare l'equilibrio del sistema (due bolle e gas contenuto al loro interno).

b) Mostrare che esistono tre stati di equilibrio e caratterizzarli

c) Determinare quale/quali stati di equilibrio sono stabili.



Soluzioni 18/06/2014

Esercizio 1

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\frac{Q_3}{T_3}=0. \quad \text{(Teorema di Clausius)}$$

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_1}{T_3}=-\frac{Q_2}{T_2}, \quad Q_1\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_3}\right)=-\frac{Q_2}{T_2},$$

$$Q_1\frac{T_1+T_3}{T_1T_3}=-\frac{Q_2}{T_2}, \quad Q_1=-\frac{Q_2}{T_2}\frac{T_1T_3}{T_1+T_3}$$

$$Q_1=\frac{2*10^5}{973.2}*\frac{573.2*373.2}{573.2+373.2}\ J=46452\ J.$$

$$L_{tot}=Q_2-|Q_1|-|Q_3|=Q_2-2|Q_1|=$$

$$2*10^5\ J-2*46452\ J=107096\ J.$$

$$\eta=\frac{L_{tot}}{Q_2}=\frac{107\,096}{2*10^5}=0.53548.$$

Esercizio 2

$$Q=m\int_{T_1}^{T_2}C_p dT \qquad C_p=a+bT+cT^{-2}$$

$$\Delta H=Q=m\left[a(T_2-T_1)+\frac{b}{2}(T_2^2-T_1^2)-C(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1})\right]=$$

$$0.25(122.3*1120+0.015*(1400^2-280^2)-2.15*10^5(\frac{1}{1400}-\frac{1}{280}))J=$$

$$41454\ J$$

$$\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=m\int_{T_1}^{T_2}C_p\frac{dT}{T}=m\left[a\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}+b\int_{T_1}^{T_2}dT+c\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^3}\right]=$$

$$m\left[a\ln\frac{T_2}{T_1}+b(T_2-T_1)-\frac{c}{2}(\frac{1}{T_2^2}-\frac{1}{T_1^2})\right]=$$

$$0.25(122.3\ln\frac{1400}{280}+0.03(1120)-\frac{2.15*10^5}{2}(\frac{1}{1400^2}-\frac{1}{280^2}))\frac{J}{K}=$$

$$57.938\frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{univ}=\Delta S+\Delta S_{sorg}=\Delta S-\frac{Q}{T_2}=(57.938-\frac{41454}{1400})\frac{J}{K}=28.328\frac{J}{K}$$

Esercizio 3

Area della superficie della finestra

A = H x L = 1,2 x 2 = 2,4 m^2

Resistenza termica dei singoli strati

1) Resistenza allo scambio termico della superficie interna per convezione (aria interna-superficie interna parete)

$$R_{conv,i} = \frac{1}{h_i} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad \left[\frac{m^2 °C}{W}\right]$$

2) Resistenza allo scambio termico per conduzione attraverso la lastra:

$$R_1 = \frac{s_v}{\lambda_v} = \frac{0,006}{0,78} = 0,008 \quad \left[\frac{m^2 °C}{W}\right]$$

3) Resistenza allo scambio termico della superficie esterna per convezione (superficie esterna parete- aria esterna)

$$R_{conv,e} = \frac{1}{h_i} = \frac{1}{25} = 0,04 \quad \left[\frac{m^2 °C}{W}\right]$$

Resistenza totale

$R = R_{conv,i} + R_1 + R_{conv,e}$ = 0,1+0,008+0,04 = 0,148 [m^2°C/W]

Potenza termica dispersa attraverso la finestra in regime stazionario

$$\dot{Q} = A\frac{T_i - T_e}{R} = 2,4 \cdot \frac{24-5}{0,148} = 470 \quad [W]$$

Flusso termico

$$q = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{470}{2,4} = 196,2 \quad [W/m^2]$$

Temperatura superficiale interna *Ts,i*

Essendo

$$q = \frac{T_i - T_e}{R}$$

Poichè si assume il regime stazionario q è costante ed è anche:

$$q = \frac{T_i - T_{s,i}}{R_{conv,i}}$$

da cui risulta:

$$T_{s,i} = T_i - qR_{conv,i} = \quad 24 - 196,2 \cdot 0,1 = 4,4 \quad [°C]$$

Esercizio 4

Il sistema è in contatto con un serbatoio di calore e volume. L'equilibrio corrisponde quindi a trovare il minimo di $G_0=U-T_0S+p_0V$.
La temperatura è fissata dal termostato e quindi si può cercare il minimo di $G_0=F(T_0,V)+p_0V$.
Le variabili interne sono:

- i volumi V_1 e V_2 delle due bolle, o i raggi r1 e r2
- i numeri di moli n_1 e n_2 di gas contenuti nelle bolle (nessuno scambio con l'esterno)

Il differenziale $dG_0= \Sigma_{i=1,2} (dF_i+p_0dV_i)$

$\underbrace{dF_i=-p_idV_i + \gamma d\Sigma_i + \mu_i dn_i}$ dove γ è la tensione superficiale dell'interfaccia liquido/gas p_i e μ_i sono la pressione ed il potenziale chimico della bolla

$dV_i=4\pi r_i^2 dr_i$ $\quad d\Sigma_i = 16\pi r_i dr_i$ (2 interfacce liquido/gas in ogni bolla)

$$dG_0 = 4\pi r_1^2 (p_0-p_1+ 4\gamma/r_1) dr_1 + 4\pi r_2^2 (p_0-p_2+ 4\gamma/r_2) dr_2 +(\mu_1 -\mu_2) dn_1$$

Ognuno dei termini si deve annullare ll'equilibrio. Per il terzo occorre che $\mu_1(T_0, p_1) = \mu_2(T_0, p_2)$ e quindi $p_1= p_2= p$

Gli altri termini si annullano assieme quando i due raggi sono uguali per $p=p0 + 4\gamma/r_\alpha$

Questa soluzione è simmetrica con le due bolle uguali.

Però i due primi termini si annullano anche separatamente:

$r_1=0$
$p_2=p_0+ 4\gamma/r_\beta$

$r_2=0$
$p_1=p_0+ 4\gamma/r_\beta$

In questi casi c'è una sola bolla o di qua o di là della cannuccia.
Nel primo caso possiamo studiare l'effetto della variazione di r_1 e r_2, mantenendo la condizione $p_1=p_2$.

$\partial^2G_0/\partial r_1^2 | >0$ $\quad \left.\dfrac{\partial^2 G_0}{\partial r_1^2}\right|_{T_0, r_2, p_1=p_2} = \left.\dfrac{\partial^2 G_0}{\partial r_2^2}\right|_{T_0, r_1, p_1=p_2} - \left(\left.\dfrac{\partial^2 G_0}{\partial r_1 \partial r_2}\right|\right)^2 > 0$

Le tre derivate seconde sono facili da calcolare per un gas perfetto. Ne segue che la soluzione simmetrica NON è un minimo. Quindi l'equilibrio corrisponde alla scomparsa della bolla più piccola.

Lo studente può anche cavarsela verificando che G_0 è una funzione crescente dell'area Σ e che quindi la situazione ottimale è quella con area minima e cioè una sola bolla.

$p_1=p_2 = \dfrac{(n_1+n_2)RT}{V_1+V_2}$ $\quad V_i = \dfrac{4}{3}\pi r_i^3$ $\quad r_1=r_2=r_\alpha$

6

$$\left.\frac{\partial^2 G_0}{\partial r_1^2}\right| = \left.\frac{\partial^2 G_0}{\partial r_2^2}\right| = 2\pi \left[3 p_0 r_\alpha + 4 \gamma \right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial r_1 \partial r_2}\right| = 2\pi \left[3 p_0 r_\alpha + 12 \gamma \right]$$

allora

$$\left.\frac{\partial \bar{G}_0}{\partial \Sigma}\right|_{S_\alpha, S_\beta, V} = \gamma \quad \text{positivo}$$

$$d\bar{G}_0 = (T_\alpha - T_0)\, dS_\alpha + (T_\beta - T_0)\, dS_\beta + (p_0 - p)\, dV + \gamma\, d\Sigma$$