I PROVA IN ITINERE – 13/04/2010
CdL CTF - A. Lascialfari

Esercizio 1

La massa totale di un bambino e della sua slitta è di 40 kg. La neve esercita una forza di attrito di 50 Newton. (a) Calcolare il lavoro necessario per trainare il bambino e la slitta su per un pendio lungo 100 m inclinato di 30° rispetto all'orizzontale; (b) una volta raggiunta la cima, il bambino scivola giù per il pendio con la slitta. Supponendo che la forza di attrito sia la stessa, calcolare l'energia cinetica i la velocità in fondo alla discesa; (c) calcolare l'intensità della forza di frenamento F_1 che il bambino deve applicare per arrivare in fondo la pendio con una velocità di 2m/s.

Esercizio 2

Un corpo di massa m_1=2.60 kg è tenuto fermo su un piano, inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Questo corpo è legato tramite una corda ideale, passante su di una carrucola ideale che ruota senza attrito, a un secondo corpo di massa m2=2.20 kg, sospeso nel vuoto a un'altezza di 2.00 m dal suolo. Il coefficiente di attrito dinamico tra il piano inclinato e il corpo 1 è 0.180. Ad un certo istante, il corpo 1 viene lasciato libero. Quanto tempo è necessario perchè il corpo 2 arrivi al suolo ?

SOLUZIONI I PROVA IN ITINERE – 13/04/2010

Esercizio 1

a) Il lavoro totale è la somma di quello fatto contro la forza peso e quello fatto contro la forza di attrito:

$$L = mgh + F_A S = 40 \times 9.8 \times 100 \times \sin 30^o + 50 \times 100 = 24600 \text{ J}.$$

b) Applichiamo la relazione $L = \Delta T$, dove ora al lavoro della forza peso va sottratto quella della forza di attrito, che è resistente. Poichè la velocità iniziale è zero, possiamo scrivere:

$$L = L_{peso} - L_{attrito} = \frac{1}{2} m v^2 =$$

$$= 14600 \text{ J, da cui:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 14600}{40}} = 27 \text{ m/sec} = 97 \text{ km/h}.$$

E' chiaro che al bambino conviene passare al punto c).

c) Questa volta il lavoro totale è:

$$L = L_{peso} - L_{attrito} - L_{frenamento} = mgh - F_A S - F_1 S = \frac{1}{2} m v'^2$$

dove v' è la nuova velocità di arrivo. Allora:

$$F_1 = -\frac{1}{2}\frac{m v'^2}{S} + mg \sin\alpha - F_A =$$

$$= -\frac{40 \times 2^2}{2 \times 100} + 40 \times 9.8 \times \sin 30^o - 50 =$$

$$= 145.2 \text{ N}.$$

Esercizio 2

Possiamo iniziare disegnando il diagramma di corpo libero per ognuno dei due corpi.

Si osservi che il blocco 1 scivo-

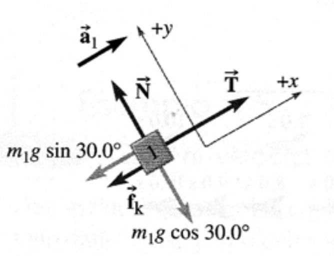

Figura 4.16
Diagramma del corpo libero per il blocco 1. L'asse x di riferimento è parallelo al piano inclinato ed è rivolto verso l'apice del piano inclinato; l'asse y è invece perpendicolare al piano inclinato, ed è rivolto obliquamente verso l'alto.

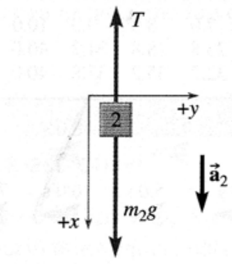

Figura 4.17
Diagramma del corpo libero per il blocco 2. L'asse x di riferimento è verticale ed è rivolto verso il basso; l'asse y è invece orizzontale, ed è rivolto verso destra.

la verso l'alto sul piano (tirato dalla corda); la forza d'attrito $\vec{f}_k$ ha quindi direzione parallela al piano inclinato ma è rivolta verso il basso. Inoltre, la forza peso del corpo 1 è stata scomposta nelle sue componenti, una parallela al piano inclinato e l'altra perpendicolare a esso.

Considerando il diagramma di corpo libero, possiamo allora scrivere la seconda legge di Newton in termini delle componenti dei vettori. Lungo la direzione perpendicolare al piano inclinato il corpo 1 non ha accelerazione (non si solleva ne penetra all'interno del piano, ma può solo scivolare su di esso), e quindi la forza risultante in questa direzione (che abbiamo detto essere la direzione dell'asse y) deve essere nulla. Cioè:

$$\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta = 0$$

ovvero:

$$N = m_1 g \cos\theta$$

dove $\theta = 30.0°$. Lungo la direzione parallela al piano inclinato (direzione x), l'accelerazione del corpo 1 è invece diversa da zero, e quindi

$$\sum F_x = T - m_1 g \sin\theta - f_k = m_1 a_x$$

Ma la forza d'attrito è in relazione con la forza normale:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos\theta$$

Sostituendo:

$$T - m_1 g \sin\theta - \mu_k m_1 g \cos\theta = m_1 a_x \qquad (1)$$

Per il corpo 2, abbiamo scelto un asse x verticale, rivolto verso il basso (Fig. 4.17). In questo modo si semplifica la risoluzione, dato che il valore dell'accelerazione dei due corpi, a_x, diventa esattamente lo stesso, anche per quello che riguarda il segno algebrico. Applicando la seconda legge di Newton:

$$\sum F_x = m_2 g - T = m_2 a_x \qquad (2)$$

Se consideriamo le Eq. (1) e (2) che abbiamo appena ottenuto, si osserva che ci sono due incognite comuni, e cioè la tensione della corda, T, e la componente lungo x dell'accelerazione, a_x. Possiamo allora ricavare T dalla Eq. (2) e sostituire il suo valore nell'Eq. (1):

$$T = m_2 g - m_2 a_x = m_2(g - a_x)$$

$$m_2(g - a_x) - m_1 g \sin\theta - \mu_k m_1 g \cos\theta = m_1 a_x$$

Riarrangiando e risolvendo per a_x, si trova:

$$a_x = \frac{m_2 - m_1(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)}{m_1 + m_2} g \qquad (3)$$

Sostituendo i valori numerici:

$$a_x = \frac{2.20\,\text{kg} - 2.60\,\text{kg} \times (0.50 + 0.180 \times 0.866)}{2.60\,\text{kg} + 2.20\,\text{kg}} \times 9.80\,\text{m/s}^2$$
$$= 1.01\,\text{m/s}^2$$

Il corpo 2 si trova a una distanza di 2.00 m da terra, che deve coprire partendo da fermo e con una accelerazione costante di 1.01 m/s^2. Dalla Eq. (4-4), considerando che $v_{1x} = 0$,

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

Il tempo necessario per percorrere questa distanza è allora

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\,\Delta x}{a_x}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.00\,\text{m}}{1.01\,\text{m/s}^2}} = 2.0\,\text{s}$$

(b) La Figura 4.18 mostra il diagramma del moto per il corpo 2. Scegliendo $x_i = 0$ e $t_i = 0$, la posizione del corpo in funzione del tempo è data da $x = 1/2\ a_x\ t^2$.

Discussione Un vantaggio di risolvere per a_x l'equazione (3) *prima* di inserire i valori numerici è che si può fare una verifica dell'equazione ricavata considerando le dimensioni (o le unità di misura) delle grandezze presenti. Nelll'Eq. (3), la quantità tra parentesi è priva di dimensioni (i valori delle funzioni trigonometriche sono numeri puri, esattamente come il coefficiente d'attrito). Quindi il numeratore è la somma di due grandezze con la dimensione di una forza, mentre il denominatore è la somma di due masse. Il rapporto tra forza e massa è proprio una accelerazione.

Che cosa sarebbe successo invece se il problema non ci avesse fornito il verso dell'accelerazione dei due corpi? Avremmo potuto trovarlo confrontan-