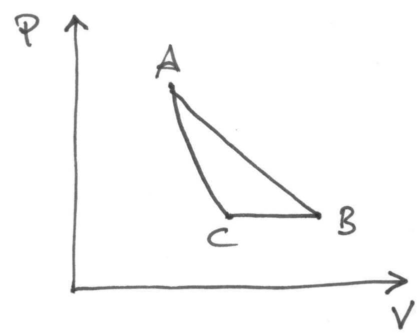
PROVA DI ESAME SCRITTO DI TERMODINAMICA per l'ammissione alla prova orale
a.a. 2017-2018 Prof. Alessandro Lascialfari e Prof. Giorgio Rossi - 2 luglio 2019
Scegliere e svolgere 3 esercizi sui 4 proposti

Esercizio 1
Un blocco di stagno di massa m = 1.5 kg a temperatura ambiente (t_A = 20°C) viene posto a contatto con una sorgente alla temperatura di fusione dello stagno (t_F = 232°C). Ad equilibrio raggiunto, la variazione di entropia dell'universo vale ΔS_{un} = 42.2 J/K. Calcolare il calore specifico dello stagno.

Esercizio 2
Un gas ideale biatomico, a pressione $P_0 = 1.013*10^5$ Pa, volume V_0 = 0.01 m^3 e temperatura T_0 = 293.2 K viene compresso adiabaticamente e reversibilmente fino a $V_1 = 1.5*10^{-3}$ m^3. A causa dell'imperfetto isolamento termico, dopo un certo tempo il gas ritorna alla temperatura iniziale T_0. Calcolare la pressione massima raggiunta, la temperatura massima, la pressione finale del gas, la variazione di entropia del gas e l'energia inutilizzabile.

Esercizio 3
Una mole di gas ideale monoatomico si porta allo stato A (P_A=1.50 bar) allo stato B (V_B=0.020m^3) tramite una trasformazione reversibile di equazione P=aV+b, con a=-100bar/m^3 e b=2.5 bar. La successiva trasformazione BC è isobara, con il gas a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_c. Infine il gas torna nello stato A con una trasformazione reversibile di equazione pV^2=c con c costante. Calcolare:

1) la temperatura T_c
2) il calore scambiato dal gas in un ciclo
3) il rendimento del ciclo
4) la variazione dell'entropia dell'universo in un ciclo



Esercizio 4
Determinare :
a) Quanti atomi di elio riempiono un pallone di un diametro di 30.0 cm a 20.0°C e 1 atm
b) Quale è l'energia cinetica media per ciascun atomo di elio ?
c) Quale è la velocità quadratica media di ciascun atomo ?

Soluzioni 02/07/2019

Esercizio 1

$$\Delta S_{un} = \Delta S_{Sn} + \Delta S_{amb} \qquad \Delta S_{Sn} = mc\ln\frac{T_F}{T_A} + \frac{m\lambda}{T_F}, \quad \Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_F}.$$

$Q = mc(T_F - T_A) + m\lambda$ calore ceduto dalla sorgente..

$$\Delta S_{amb} = -\frac{mc(T_F - T_A) + m\lambda}{T_F},$$

$$\Delta S_{un} = mC\ln\frac{T_F}{T_A} + \frac{m\lambda}{T_F} - \frac{mc(T_F - T_A) + m\lambda}{T_F} = mC\left(\ln\frac{T_F}{T_A} - \frac{T_F - T_A}{T_F}\right),$$

$$C = \frac{\Delta S_{un}}{m\left(\ln\frac{T_F}{T_A} - \frac{T_F - T_A}{T_F}\right)} = \frac{42.2}{1.5\left(\ln\frac{273.15+232}{273.15+20} - \frac{232-20}{273.15+232}\right)}\ J/KgK = 225.98\ J/KgK.$$

Esercizio 2

$$\gamma = \frac{7}{5},$$

Nell'adiabatica reversibile

$$P_0V_0^\gamma = P_1V_1^\gamma, \Rightarrow P_1 = P_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = 1.013 * 10^5\left(\frac{10}{1.5}\right)^{\frac{7}{5}} Pa = 1.4424 * 10^6\ Pa$$

$$T_0V_0^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 = T_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 293.2\left(\frac{10}{1.5}\right)^{\frac{2}{5}} K = 626.22\ K$$

A volume costante il gas si raffredda fino a T_0 e la pressione p_2 finale sarà

$$P_2V_1 = P_0V_0 \Rightarrow P_2 = \frac{P_0V_0}{V_1} = \frac{1.013 * 10^5 * 0.01}{1.5 * 10^{-3}}\ Pa = 6.7533 * 10^5 Pa$$

La variazione d'entropia del gas lungo l'isocora sarà:

$$\Delta S_{gas} = nC_v\ln\frac{T_0}{T_1} = \frac{P_0V_0}{RT_0}\frac{5}{2}R\ln\frac{T_0}{T_1} = \frac{5}{2}\frac{1.013 * 10^5 * 0.01}{293.2}\ln\frac{293.2}{626.22}\frac{J}{K} =$$

$$= -6.5545\frac{J}{K}$$

e quella dell'ambiente

$$\Delta S_{amb} = nC_v\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{P_0V_0}{RT_0}\frac{5}{2}R\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{5}{2}\frac{P_0V_0}{T_0^2}(T_1 - T_0) =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.01}{(293.2)^2}(626.22 - 293.2)\frac{J}{K} = 9.8105\frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{un} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = (-6.5545 + 9.8105)\frac{J}{K} = 3.256\frac{J}{K} =$$

$$E_{in} = T_0\Delta S_{un} = 293.2 * 3.256\frac{J}{K} = 954.66\frac{J}{K}$$

Esercizio 3

Domanda 1. Dall'equazione $p = aV + b$, valida per A e B, possiamo subito determinare $V_A = (p_A - b)/a$ e $p_B = p_C = aV_B + b$. Dall'equazione $p_C V_C^2 = p_A V_A^2 = c$ possiamo allora determinare $V_C = V_A\sqrt{(p_A/p_C)}$, e la costante c. Infine, dall'equazione di stato $pV = nRT$ otteniamo $T_C = p_C V_C/nR$. Analogamente si ottengono T_A e T_B, e così tutte le coordinate termodinamiche dei punti A, B e C sono note.

Domanda 2. In generale, il calore trasferito al gas in ogni trasformazione può essere ottenuto come $Q = L + \Delta E$ dal primo principio della termodinamica, dove $L = \int p dV$ è il lavoro svolto dal gas e $\Delta E = nC_V \Delta T$ la variazione di energia interna. $C_V = (3/2)R$ essendo il gas monoatomico. $C_p = (5/2)R$ (utile per la trasformazione BC).

Consideriamo ad una ad una le tre trasformazioni.

$$L_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$

(ovvio graficamente, se si pensa a $\int p dV$ come l'area sottesa)

$$Q_{\mathrm{AB}} = L_{\mathrm{AB}} + nC_V(T_B - T_A)$$

$$L_{\mathrm{BC}} = -p_B(V_B - V_C) = -nR(T_B - T_C)$$

$$Q_{\mathrm{BC}} = -nC_p(T_B - T_C)$$

$$L_{\mathrm{CA}} = \int_{V_C}^{V_A} \frac{c}{V^2} dV = \frac{c}{V_C} - \frac{c}{V_A}$$

$$Q_{\mathrm{CA}} = L_{\mathrm{CA}} + nC_V(T_A - T_C)$$

Il calore scambiato in un ciclo è $Q = Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BC}} + Q_{\mathrm{CA}}$. Per il primo principio questo è anche uguale al lavoro prodotto L, in quanto $Q = L$ per un ciclo chiuso.

V_A=0.01 m^3
P_B= P_C=0.5 bar
V_C=0.077 m^3
T_C=104 K
T_A=180.5 K
T_B=120.33 K
L_{AB}=1000 J
ΔU_{AB}=-750 J
Q_{AB}=250 J
ΔS_{AB}=0.71 J/K
Q_{BC}=-338 J
L_{BC}= -135 J
L_{CA}= -633 J
Q_{CA}= 320 J
η=40.7%
$\Delta S_{univ.}$=0.22 J/K

Il calore scambiato in un ciclo è $Q = Q_{\rm AB} + Q_{\rm BC} + Q_{\rm CA}$. Per il primo principio questo è anche uguale al lavoro prodotto L, in quanto $Q = L$ per un ciclo chiuso.

Domanda 3. Il calore assorbito è $Q_a = Q_{\rm AB} + Q_{\rm CA}$ (nella trasformazione BC viene ceduto calore). Il rendimento è $\eta = L/Q_a$.

Domanda 4. L'entropia dell'universo in un ciclo varia solo se vi sono trasformazioni non reversibili. In questo caso l'unica trasformazione non reversibile è quella BC:

$$\Delta S_{\rm univ} = \Delta S_{\rm BC,gas} + \Delta S_{\rm BC,amb}$$

La variazione di entropia di un gas ideale in una trasformazione isobara è

$$\Delta S_{\rm BC,gas} = nC_V \ln \frac{T_C}{T_B} + nR \ln \frac{V_C}{V_B} = nC_p \ln \frac{T_C}{T_B}$$

avendo notato che per una isobara $V_C/V_B = T_C/T_B$. $\Delta S_{\rm BC,gas}$ è una quantità negativa.

La variazione di entropia dell'ambiente è

$$\Delta S_{\rm BC,amb} = \frac{-Q_{\rm BC}}{T_C}$$

È una quantità positiva, e $|\Delta S_{\rm BC,amb}| > |\Delta S_{\rm BC,gas}|$. L'entropia dell'universo quindi aumenta, come dev'essere.

Esercizio 4

a)

Il numero N di atomi del pallone è pari a $N = n\,N_A$, con n = numero di moli ed N_A numero di Avogadro.

Ricavo n dalla equazione di stato dei gas perfetti:

n = pV/RT

ove il volume del pallone è pari a :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(15.0\times10^{-2}\,m)^3 = 1.41\times10^{-2}\,m^3$$

da cui:

$$n = \frac{(1.013\times10^5\,Pa)(1.41\times10^{-2}\,m^3)}{(8.315\,Nm/mol\cdot K)(20.0+273.0)K} = 0.588\,mol$$

$$N = nN_A = (0.588\,mol)(6.02\times10^{23}\,molecole/mol) = 3.54\times10^{23}\,atomi$$

b)

Energia cinetica media:

$$\overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}(1.38\times10^{-23}\,J/K)(293K) = 6.07\times10^{-21}\,J$$

c)

Calcolo la velocità quadratica media dalla energia cinetica:

$$v_{rqm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\overline{K}}{m}}$$

Un atomo di He ha massa:

$m = M/N_A = (4.0026\text{ g/mol})/(6.02\ 10^{-23}\text{ molecole/mol})$
$= 6.65\ 10^{-24}\text{ g} = 6.65\ 10^{-27}\text{ kg}$

ove M = 4.0026 g/mol è la massa molare

da cui:

$$v_{rqm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2(6.07\times10^{-21}\,J)}{6.65\times10^{-27}\,kg}} = 1.35\,km/s$$