PROVA DI ESAME SCRITTO DI TERMODINAMICA per l'ammissione alla prova orale

a.a. 2014-2015 Proff. Alessandro Lascialfari e Giorgio Rossi - 16 Giugno 2015

Scegliere e svolgere 3 esercizi sui 4 proposti

Esercizio 1

Una mole di gas ideale biatomico compie un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: isocora AB, isobara BC, isocora CD ed una isobara DA che chiude il ciclo. Calcolare il rendimento del ciclo conoscendo la variazione di energia interna $\Delta U_{AB} = 4$ kJ, la variazione di entalpia $\Delta H_{BC} = 14$ kJ e la temperatura $T_B = 700$K. Si supponga che la vibrazione molecolare non sia attiva.

Esercizio 2

Si consideri una parete piana con base 10 m, altezza 3 m e spessore 12 cm, delimitante un vano abitativo e realizzata in un calcestruzzo con conduttività termica pari a 1.4 W/(m°×C). Sia 25°C la temperatura interna del vano e 10°C la temperatura dell'ambiente esterno, con coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete che valgono, rispettivamente, 10 W/(m^2×°C) e 40W/(m^2×°C).
Inoltre, si supponga di poter ricoprire la superficie interna della parete con un sottile rivestimento di legno di balsa, avente spessore 10 mm e caratterizzato da conduttività termica pari a 0.055 W/(m×°C).
Determinare la potenza termica che attraversa la parete e le temperature sulle superfici interna ed esterna della parete sia nel caso in cui non sia presente il rivestimento di legno sia nel caso esso sia presente. Commentare il risultato.

Esercizio 3

Una mole di gas, di equazione di stato $P = \frac{RT}{V} + \frac{a}{V^2}$ con a costante positiva, è contenuta in un cilindro diatermico, chiuso da un pistone scorrevole. Inizialmente il gas è in equilibrio ed occupa il volume V_A alla pressione p_A, mentre nell'ambiente esterno la pressione è $P_0 < P_A$ e la temperatura è T_0. Calcolare le variazioni di energia interna, di entalpia e di entropia, una volta che il gas, espandendosi, raggiunge l'equilibrio finale.

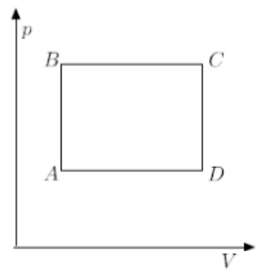
Esercizio 4

Una molecola di idrogeno ($r = 1.4 \cdot 10^{-8}$ cm) esce da un recipiente a temperatura T_H=4000 K con velocità pari alla velocità quadratica media v_{rms} a tale temperatura. Essa passa quindi in un secondo recipiente contenente argon (r_A=1,8·10^{-8} cm) a pressione atmosferica con densità M_A= 4·10^{19} molecole / cm^3.

a) Calcolare la velocità quadratica media v_H delle molecole di idrogeno
b) Calcolare la temperatura T_A alla quale si trova l'argon
c) Calcolare la velocità quadratica media v_A delle molecole di argon
d) In un urto tra una molecola di idrogeno e una di argon, quale è la distanza minima d tra i centri delle molecole nelle ipotesi della teoria cinetica.
e) Calcolare il numero N di urti per unità di tempo che la molecola di idrogeno subisce appena entrata nel recipiente dell'argon.

Soluzioni compito di Termodinamica del 16/06/2015

SOLUZIONE ES. 1



Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_a}, \qquad \eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}, \tag{1}$$

dove Q_a è il calore assorbito e Q_c quello ceduto. Nel ciclo in esame:

$$Q_a = Q_{AB} + Q_{BC}, \qquad Q_c = Q_{CD} + Q_{DA},$$

dove:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} = C_V(T_B - T_A) \qquad & Q_{CD} &= \Delta U_{CD} = C_V(T_C - T_D) \\ Q_{BC} &= \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) \qquad & Q_{DA} &= \Delta H_{DA} = C_p(T_D - T_A). \end{aligned} \tag{2}$$

Per calcolare il rendimento si può usare la prima delle (1). In tal caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (p_B - p_A)(V_C - V_B) = \left(p_B - p_B\frac{T_A}{T_B}\right)\left(V_B\frac{T_C}{T_B} - V_B\right) \\ &= p_B V_B\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)\left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) = \frac{p_B V_B}{T_B^2}(T_B - T_A)(T_C - T_B) \\ &= \frac{R}{T_B}(T_B - T_A)(T_C - T_B). \end{aligned}$$

Ma,

$$(T_B - T_A) = \frac{\Delta U_{AB}}{C_V}; \qquad (T_C - T_B) = \frac{\Delta H_{BC}}{C_p},$$

pertanto:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta H_{BC}}{C_p}\frac{\Delta U_{AB}}{C_V}.$$

Tenendo conto delle (2), il rendimento formulato con la prima delle (1) risulta:

$$\eta = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta H_{BC}\Delta U_{AB}}{C_V C_p(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = 6\%$$

Ovviamente si ottiene lo stesso risultato dalla seconda delle (1) che si scrive.

$$\eta = 1 - \frac{\Delta U_{CD} + \Delta H_{DA}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}}. \tag{3}$$

Osservando che dall'equazione di stato si ha

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C},$$

si riconosce che

$$\begin{aligned}\Delta U_{CD} &= C_V(T_C - T_D) = C_V T_C \left(1 - \frac{T_D}{T_C}\right) = C_V T_C \left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)\\ &= C_V \frac{T_C}{T_B}(T_B - T_A) = \frac{T_C}{T_B}\Delta U_{AB}.\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\Delta H_{DA} = \frac{T_D}{T_C}\Delta H_{BC} = \frac{T_A}{T_B}\Delta H_{BC}.$$

La (3) diventa

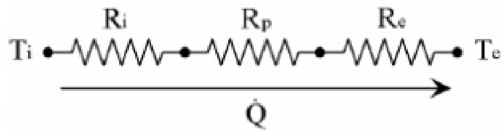
$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC} - \Delta U_{AB} T_C/T_B - \Delta H_{BC} T_A/T_B}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}}\\ &= \frac{(1 - T_C/T_B)\Delta U_{AB} + (1 - T_A/T_B)\Delta H_{BC}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}}\\ &= \frac{(T_B - T_C)\Delta U_{AB} + (T_B - T_A)\Delta H_{BC}}{T_B(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})}\\ &= \frac{-\Delta H_{BC}\Delta U_{AB}/C_p + \Delta U_{AB}\Delta H_{BC}/C_V}{T_B(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta U_{AB}\Delta H_{BC}}{C_V C_p(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})},\end{aligned}$$

come prima.

Soluzione es.2

CASO 1: Senza rivestimento in legno

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.003333 \ °C/W = 3.333 \cdot 10^{-3} \ °C/W$$

$$R_p = \frac{s}{\lambda A} = 0.002857 \ °C/W = 2.857 \cdot 10^{-3} \ °C/W$$

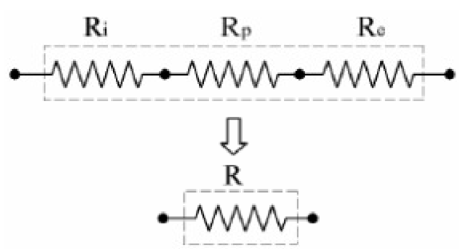
$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.000833 \ °C/W = 0.833 \cdot 10^{-3} \ °C/W$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno, la parete in calcestruzzo e lo strato convettivo superficiale esterno.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è regolata dalla relazione:

$$\Delta T = (R_i + R_p + R_e)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:



$$R = R_i + R_p + R_e = 0.007024 \ °C/W = 7.024 \cdot 10^{-3} \ °C/W$$

Pertanto, la potenza termica trasmessa dall'ambiente interno all'ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 2136 \ \ W = 2.1 \ \ kW$$

Le temperature superficiali interna ed esterna possono essere determinate considerando che la potenza termica trasmessa deve attraversare ogni singolo strato resistivo, ovvero ogni singola resistenza della serie di resistenze termiche. Valgono di conseguenza le relazioni:

$$T_i - T_{i,s} = R_i \dot{Q}$$

$$T_{e,s} - T_e = R_e \dot{Q}$$

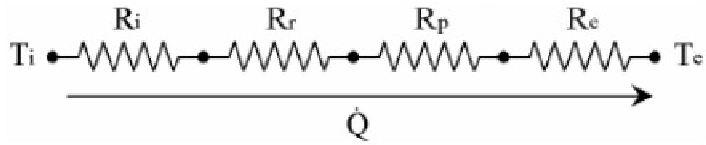
da cui si ottiene

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 17.9°C$$

$$T_{e,s} = T_e + R_e \dot{Q} = 11.8°C$$

CASO 2: Con rivestimento in legno

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui i valori di tutte le resistenze della serie sono già stati calcolati, eccetto quello della resistenza relativa al rivestimento in legno di balsa, che vale:

$$R_r = \frac{s_r}{\lambda_r A} = 0.006061\ °C/W = 6.061 \cdot 10^{-3}\ °C/W$$

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è quindi regolata dalla relazione:

$$\Delta T = (R_i + R_r + R_p + R_e)\dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_r + R_p + R_e = 0.013084\ °C/W = 13.084 \cdot 10^{-3}\ °C/W$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 1146\ \ W = 1.1\ \ kW$$

Si noti come un sottile rivestimento a bassa conducibilità abbia un effetto isolante comparabile a quello dell'intera parete in calcestruzzo. Il rivestimento assicura anche una superficie più calda delle pareti. Infatti, la temperatura superficiale interna vale:

$$T_{i,s} = T_i - R_i\dot{Q} = 21.2°C$$

Il risultato è significativamente superiore a quello ottenuto in precedenza, pari a 17.9°C.

Al fine di minimizzare gli errori di troncamento, nei calcoli intermedi delle resistenze termiche è stato mantenuto un numero di cifre significative largamente superiore all'accuratezza che ci si attende sulla stima finale della potenza termica trasmessa.

Soluzione es.3

L'espansione è irreversibile ma gli stati iniziale e finale hanno la stessa temperatura. Per le grandezze di stato di cui si vuole calcolare la variazione, si ha:

$$\begin{aligned} dU &= C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\ dH &= dU + d(pV) \\ dS &= C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Rammentando che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

ed essendo uguale la temperatura negli stati iniziale e finale, si ha

$$\Delta U = \int_A^B \frac{a}{v^2} dV = a\frac{V_B - V_A}{V_A V_B} > 0.$$

Per la seconda delle (1) la variazione di entalpia è

$$\Delta H = \Delta U + p_B V_B - p_A V_A,$$

e, tenuto conto dell'equazione di stato,

$$\Delta H = 2a\frac{V_B - V_A}{V_A V_B}.$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia, dalla terza delle (1) si ottiene:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_B}{V_A}.$$

Si osservi che sia la variazione di energia interna che le variazioni di entalpia e di entropia dipendono dal volume.

Soluzione es.4

a) $v_H = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_H}}$ con $M_H = 2$

$$v_H = \left(\frac{3 \cdot 8.31 \cdot 10^3 \cdot 4000}{2} \right)^{1/2} = 7062 \text{ m/s}$$

b)

densità dell' argon $\quad n_A = \dfrac{n N_0}{V} = \dfrac{p N_0}{R T_A}$

$$T_A = \frac{p N_0}{R n_A} = \frac{p}{k n_A} = \frac{1.01 \cdot 10^5}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 4 \cdot 10^{25}} = 183 \text{ K}$$

c) $v_A = \sqrt{\dfrac{3RT_A}{M_A}}$ con $M_A = 40$

$$v_A = \left(\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 183}{40} \right)^{1/2} = 337{,}7 \text{ m/s}$$

d) $d = 3.2 \cdot 10^{-8}$ cm

e) frequenza di collisione $\quad f = \dfrac{\bar{v}_H}{\lambda}$

$$\bar{v}_H = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M_H}} = 6507{,}2 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi r_H^2 n_A} = \frac{RT_A}{4\pi r_H^2 p N_0}$$

$$f \equiv N = 4\pi r_H^2 n_A \bar{v}_H = 12{,}56 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-20} \cdot 4 \cdot 10^{25} \cdot 6507{,}2$$

$= 6{,}41 \cdot 10^{10}$ urti/s