PROVA DI ESAME SCRITTO DI TERMODINAMICA per l'ammissione alla prova orale
a.a. 2018-2019 Prof. Alessandro Lascialfari e Prof. Giorgio Rossi - 15 novembre 2019
Scegliere e svolgere 3 esercizi sui 4 proposti

Esercizio 1

N=1.2 moli di un gas ideale monoatomico alla temperatura iniziale T_0=25°C seguono una trasformazione generica reversibile di equazione TV^{-3} = cost, aumentando del 40% il volume iniziale V_0, cioè $V_f = \alpha \cdot V_0$ con α=1.4. Determinare: a) la temperatura finale del gas; b) il lavoro fatto durante la trasformazione; c) il calore assorbito durante la trasformazione.

Esercizio 2

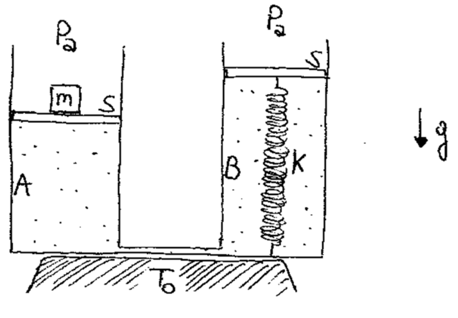
Una macchina reversibile lavora tra una sorgente a temperatura T_1 ed una sorgente di capacità termica finita C (che non dipende dalla temperatura) che inizialmente si trova ad una temperatura T_2. (a) Immaginiamo di fare eseguire delle trasformazioni che producono lavoro via via abbassando la temperatura della sorgente. Quale è il massimo lavoro che si riesce a produrre? (b) Se anche la sorgente T_1 avesse la stessa capacità termica quale sarebbe il massimo lavoro che si può produrre? (T_1=1°C, T_2=99°C, C=10000 J/K)

Esercizio 3

Un blocco di ghiaccio (calore specifico c_g=2051 J/kgK, calore latente di fusione $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg) di massa m_1 si trova all'interno di un contenitore isolante a temperatura T_1=-20°C. Molto rapidamente vengono inseriti nel contenitore un corpo solido a temperatura T_2=60°C, massa m_2=4 kg, calore specifico c_2=380 J/kgK e dell'acqua di massa m_3=0.8 kg, calore specifico c_a=4186 J/kgK e temperatura T_3=10°C. La temperatura di equilibrio vale T_4=-3°C.
Determinare: (a) il calore sottratto all'acqua a temperatura T_3 nel processo di raffreddamento del liquido, solidificazione e raffreddamento del ghiaccio; (b) il valore della massa m_1; (c) la variazione di entropia del sistema in tale processo irreversibile.

Esercizio 4

Due recipienti cilindrici A e B disposti con l'asse in direzione verticale, di uguale sezione S = 0.020m^2, sono chiusi superiormente da due pistoni di massa trascurabile scorrevoli verticalmente senza attrito, al di sopra dei quali c'è l'atmosfera con pressione $P_a = 1.000 \cdot 10^5$ Pa. Le pareti interne dei pistoni e dei recipienti sono adiabatiche, mentre le loro basi sono a contatto con una sorgente esterna di calore alla temperatura T_0 = 273K. I due recipienti sono collegati tra loro da un tubicino di volume trascurabile e contengono gas perfetto monoatomico. Sul pistone in A è posato un corpo di massa m = 100 kg, mentre il pistone in B è collegato al fondo del recipiente da una molla di costante elastica k = 1000N/m e lunghezza di riposo trascurabile. Il sistema `e in equilibrio e il volume di A è V_{A0} = 0.020m^3.
(1) si calcoli il numero complessivo n di moli del gas;
(2) si porti in modo reversibile la temperatura da T_0 a T_1 = 300K e si calcoli l'altezza (rispetto alla base) a cui si trova il pistone in A ad equilibrio raggiunto;
(3) mantenendo la temperatura a T_1, si esercita sul pistone in B una forza addizionale fino a dimezzare il volume di B; si assuma nuovamente reversibilità. Si calcoli il lavoro totale L fatto dalla forza applicata, e si indichi come il sistema ha immagazzinato l'energia fornita.



Soluzioni 15/11/2019

Esercizio 1

a)

Trasformando la temperatura in gradi K:

$$T_o = 298\ K$$

Essendo la trasformazione politropica (generica reversibile):

$$T_o V_o^{-3} = T_f(\alpha V_o)^{-3}$$
$$T_f = \alpha^3 T_o = 818\ K$$

b)

Il lavoro fatto durante la trasformazione vale:

$$W = \int_{V_o}^{\alpha V_o} pdV = \int_{V_o}^{\alpha V_o} \frac{nRT}{V} dV = \frac{nRT_o}{V_o^3} \int_{V_o}^{\alpha V_o} V^2 dV = \frac{nRT_o}{3}(\alpha^3 - 1) = 1.73\ kJ$$

c)

Essendo:

$$c_v = \frac{3}{2}R = 12.47\ J/K$$

La variazione di energia interna è:

$$\Delta U = nc_v(T_f - T_o) = 7.8\ kJ$$

Quindi il calore scambiato dalla trasformazione è:

$$Q_a = W + \Delta U = 9.5\ kJ$$

Esercizio 2

a)

La trasformazione che produce la massima quantità di lavoro è quella che non varia l'entropia dell'universo termodinamico.

Il calore necessario per portare il corpo di capacità termica limitata da temperatura $T_2 = 372\ K$ a $T_1 = 274\ K$ è:

$$Q_2 = C(T_2 - T_1) = 980\ kJ$$

Il segno è scelto in maniera da essere positivo come quello da utilizzare con una ipotetica macchina termica. Nel diminuire la temperatura della sorgente di capacità termica finita viene diminuita la sua entropia di:

$$dS = C\frac{dT}{T}$$

Quindi in totale:

$$\Delta S_2 = C \ln \frac{T_1}{T_2}$$

Perché l'entropia dell'universo non cambi occorre che:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$$

Essendo:

$$\Delta S_1 = -\frac{Q_1}{T_1}$$

quindi:

$$Q_1 = CT_1 \ln \frac{T_1}{T_2} = -838\ kJ$$

Quindi il lavoro massimo producibile vale:

$$W = Q_2 + Q_1 = 142\ kJ$$

Si poteva anche dire che se T è la temperatura istantanea della sorgente finita inizialmente alla temperatura T_2 essa alla fine dei cicli si porterà alla temperatura T_1. Nel ciclo infinitesimo la temperatura della sorgente più alta diminuirà di dT e fornirà un calore pari a :

$$dQ_2 = -CdT$$

Se agisce una macchina reversibile tra la temperatura istantanea T e la sorgente a T_1, il lavoro infinitesimo prodotto in un ciclo vale:

$$dW = -\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dQ = -\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) CdT$$

Quindi:

$$W = -C\int_{T_2}^{T_1} \left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT = C[(T_2 - T_1) - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}] = 142\ kJ$$

b)

Nel secondo caso debbo imporre che:

$$C \ln \frac{T_e}{T_2} + C \ln \frac{T_e}{T_1} = 0$$

Quindi, la temperatura di equilibrio finale, vale:

$$T_e^2 = T_1 T_2$$
$$T_e = 319\ K$$

Quindi:

$$Q_2 = C(T_2 - T_e) = 530\ kJ$$

e

$$Q_1 = C(T_1 - T_e) = -450\ kJ$$

Quindi:

$$W = Q_1 + Q_2 = 80\ kJ$$

Esercizio 3

a)

Detto $T_0 = 0\,^oC$, il calore da sottrarre alla massa m_3 per portarla a T_4 è dato dal raffreddamento del liquido fino a T_0, solidificazione (calore latente di solidificazione) e raffreddamento del ghiaccio fino a T_4 :

$$Q_3 = m_3[c_a(T_3 - T_0) + \lambda_g + c_g(T_0 - T_4)] = 3.02 \cdot 10^5\ J$$

b)

Il calore da sottrarre a m_2 per portarla da T_2 a T_4 vale:

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T_4) = 9.6 \cdot 10^4\ J$$

Quindi dovendo essere:

$$m_1 c_g (T_4 - T_1) = Q_2 + Q_3$$
$$m_1 = \frac{Q_2 + Q_3}{c_g (T_4 - T_1)} = 11.4\ kg$$

c)

Tutte le temperature vanno espresse in gradi K :

$$T_0 = 273.15\ K \qquad T_1 = 253.15 \qquad T_2 = 333.15\ K \qquad T_3 = 283.15\ K \qquad T_4 = 270.15\ K$$

La diminuzione di entropia dell'acqua di massa m_3 per andare da T_3 a T_4 :

$$DS_3 = m_3 \left[c_a ln \frac{T_0}{T_3} - \frac{\lambda_g}{T_0} + c_0 ln \frac{T_4}{T_0} \right] = -1105\ J/K$$

La diminuzione di entropia del solido:

$$DS_2 = m_2 c_2 ln \frac{T_4}{T_2} = -319\ J/K$$

L'aumento di entropia del ghiaccio:

$$DS_1 = m_1 c_1 ln \frac{T_4}{T_1} = 1522\ J/K$$

Quindi in totale l'entropia aumenta di:

$$DS = DS_1 + DS_2 + DS_3 = 99\ J/K$$

Esercizio 4

Domanda 1.

All'equilibrio la forza netta agente su entrambi i pistoni deve essere nulla. Quindi, detta P_0 la pressione del gas, dovrà essere vero per il pistone di A:

$$P_a S + mg = P_0 S$$

e per il pistone di B:

$$P_a S + kx_0 = P_0 S$$

I membri a sinistra sono le forze dirette verso il basso, i membri a destra sono le forze dirette verso l'alto dovute alla pressione del gas. x_0 è l'elongazione della molla all'equilibrio. La prima equazione ci dice che deve essere

$$P_0 = P_a + \frac{mg}{S}$$

La temperatura non gioca qui alcun ruolo: si tratta di una condizione di equilibrio "meccanico". Questa equazione sarà quindi sempre valida per il cilindro A, per tutti gli stadi in cui è articolato questo problema.

Uguagliando le prime due equazioni fra loro otteniamo inoltre

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

da cui il volume del cilindro B, $V_{B0} = Sx_0 = mgS/k$ e il volume totale $V_0 = V_{A0} + V_{B0}$.

Note pressione e volume del gas in termini dei dati del problema e nota la temperatura, il numero di moli si ottiene semplicemente utilizzando l'equazione di stato del gas ideale:

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0}.$$

Domanda 2.

Come indicato nella domanda precedente, la pressione del gas P_0 non varierà in questa trasformazione. Si tratta dunque di una trasformazione isobara, in cui il volume totale aumenta proporzionalmente all'aumento di temperatura:

$$V_1 = \frac{T_1}{T_0} V_0$$

Poichè deve anche rimanere inalterata x_0 [in modo che l'attrazione del pistone in B dovuta alla molla continui a compensare esattamente la spinta verso l'alto $(P_0 - P_a)S$, rimasta invariata], la variazione del volume complessivo sarà determinata esclusivamente dallo spostamento del pistone nel cilindro A. L'altezza h_1 del pistone in A sarà data da

$$h_1 = \frac{V_1 - V_{B0}}{S} = h_0 + \frac{V_1 - V_0}{S}$$

Domanda 3.

Durante l'ultimo processo, nuovamente la pressione del gas rimane P_0, dovendo sempre essere valida la condizione di equilibrio del pistone nel cilindro A $(P_a S + mg = P_0 S)$. Nemmeno la temperatura T_1 varia, e quindi anche il volume complessivo V_1 occupato dal gas resta immutato. Il gas non varia quindi il suo stato termodinamico.

Il lavoro effettuato dalla forza esterna è dato da

$$L = \int_{x_0}^{x_0/2} F(x)\, dx$$

dove

$$F(x) = -[(P_0 - P_A)S - kx] = k(x - x_0)$$

(negativa per $x < x_0$ essendo diretta verso il basso) è la forza esterna necessaria per mantenere il pistone in B all'equilibrio nella posizione x. Tale forza è nulla per $x = x_0$, e cresce di intensità man mano che x viene ridotto in quanto deve sostanzialmente sostituire l'attrazione della molla che viene progressivamente a mancare.

Avremo quindi

$$L = k \int_{x_0}^{x_0/2} (x - x_0)\, dx = \frac{1}{8} k x_0^2 = \frac{m^2 g^2}{8k}.$$

Il sistema ha assorbito una energia potenziale gravitazionale $mgx_0/2$ corrispondente al sollevamento della massa m nel pistone A di una altezza $x_0/2$, ma ha contemporaneamente restituito parte dell'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla; il bilancio energetico è pari a L. Il gas ha svolto un semplice ruolo di mediatore senza assorbire o cedere energia.