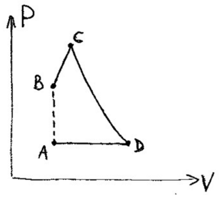
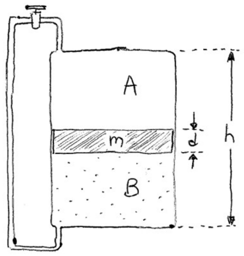
PROVA DI ESAME SCRITTO DI TERMODINAMICA per l'ammissione alla prova orale
a.a. 2018-2019 Prof. Alessandro Lascialfari e Prof. Giorgio Rossi - 24 settembre 2019
Scegliere e svolgere 3 esercizi sui 4 proposti

Esercizio 1

Una mole di gas ideale monoatomico si trova inizialmente nello stato A (T_A = 100 K, P_A =1 bar). Il gas viene posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_B = 300 K, mantenendo costante il volume, e si porta nello stato B. Successivamente, con una trasformazione reversibile di equazione P = aV con a costante, il gas passa allo stato C (T_C = 500 K). La trasformazione adiabatica reversibile CD porta il gas nello stato D con $P_D = P_A$, e infine il gas ritorna nello stato A con una trasformazione isobara reversibile. Calcolare:
1. il volume V_C;
2. la temperatura T_D;
3. il lavoro meccanico complessivo prodotto in un ciclo;
4. il rendimento del ciclo;
5. la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.



Esercizio 2
Un recipiente cilindrico di altezza h = 192 cm e superficie di base S = 128 cm^2 è diviso in due parti A e B da un pistone scorrevole verticalmente senza attrito di massa m = 15.1 kg e spessore d = 21 cm. Le due parti A e B (vedi figura 4) sono collegate attraverso un tubicino esterno al recipiente, di volume trascurabile e munito di un rubinetto inizialmente chiuso. In A c'è il vuoto mentre in B vi sono n = 0.067 moli di un gas perfetto monoatomico alla temperatura ambiente T_0 = 300 K.
1. Calcolare il volume iniziale V_B della parte B.
Si apra il rubinetto in maniera tale da fare scendere il pistone lentamente, lasciandolo aperto fino a raggiungere lo stato di equilibrio (in cui la risultante delle forze sul pistone è nulla: attenzione!). Si assuma che le pareti del recipiente permettano lo scambio di calore tra il gas e l'ambiente esterno a temperatura T_0. Si calcoli:
2. la pressione finale del gas;
3. la variazione di entropia del gas nella trasformazione (è reversibile ?).



Esercizio 3
Una macchina di Carnot assorbe in un ciclo (dalla sorgente a temperatura più alta) una quantità di calore $Q_1 = 1.5*10^3$J ed ha un rendimento η= 0.60. Il lavoro W viene utilizzato per comprimere un gas ideale biatomico lungo una trasformazione politropica reversibile (pV^k = cost) con k = 2.0, a partire da uno stato iniziale caratterizzato dai valori di pressione, volume e temperatura p_i = 1 atm, V_i = 10 dm^3 e T_i = 200 K. Determinare: (a) il lavoro W compiuto dalla macchina in un ciclo; (b) la pressione p_f e il volume V_f del gas alla fine della compressione; (c) Il calore scambiato dal gas nella trasformazione.

Esercizio 4
A quale profondità h si formano le bollicine di gas nell'acqua di uno stagno, se il raggio di tali bollicine allorché raggiungono la superficie è r_2 = 1µm, mentre era r_1 = 0,9 µm alla nascita? La pressione atmosferica è $p_o = 10^5$ Pa e si ipotizzi che la salita avvenga a temperatura costante.

Soluzioni 24/09/2019

Esercizio 1

Domanda 1.

Dai dati del problema e usando l'equazione di stato si ottiene $V_A = nRT_A/P_A$, quindi $V_B = V_A$ e $P_B = nRT_B/V_B$. Possiamo quindi calcolare il parametro a della trasformazione BC come $a = P_B/V_B$.

Per il punto C, dovrà essere vero simultaneamente che $P_C = aV_C$ e $P_CV_C = nRT_C$. Queste due equazioni permettono di ottenere le due incognite P_C e V_C, ad esempio inserendo P_C/a al posto di V_C nella seconda: $P_C = \sqrt{anRT_C}$, $V_C = P_C/a$.

Domanda 2.

CD è una trasformazione adiabatica reversibile e quindi deve soddisfare a $P_CV_C^\gamma = P_DV_D^\gamma$ dove $\gamma = 5/3$ essendo il gas monoatomico. Avremo quindi $V_D = V_C(P_C/P_D)^{1/\gamma}$ ($P_D = P_A$), e $T_D = P_DV_D/nR$. Tutti gli stati termodinamici sono quindi definiti.

Domanda 3.

I calori specifici sono $C_v = (3/2)R$, $C_p = (5/2)R$. È possibile determinare l'energetica di tutte e quattro le trasformazioni:

Trasformazione AB. $L_{AB} = 0$ (il volume resta costante), $Q_{AB} = \Delta E_{AB} = nC_v(T_B - T_A)$. Si noti che questa trasformazione è irreversibile.

Trasformazione BC. $\Delta E_{BC} = nC_v(T_C - T_B)$, $L_{BC} = \int_B^C P dV = a\int_{V_B}^{V_C} V dV = (a/2)(V_C^2 - V_B^2)$, $Q_{BC} = \Delta E_{BC} + L_{BC}$.

Trasformazione CD. $Q_{CD} = 0$ (adiabatica), $\Delta E_{CD} = -L_{CD} = nC_v(T_D - T_C)$

Trasformazione DA. $\Delta E_{DA} = nC_v(T_A - T_D)$, $Q_{DA} = nC_p(T_A - T_D)$, $L_{DA} = P_A(V_A - V_D) = nR(T_A - T_D)$.

Il lavoro meccanico complessivo prodotto in un ciclo è $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$, ovviamente anche uguale a $Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$.

Domanda 4.

Il rendimento del ciclo è il rapporto fra il lavoro prodotto e il calore assorbito: $\eta = L/(Q_{AB} + Q_{BC})$.

Domanda 5.

L'entropia dell'universo varia esclusivamente nell'unica trasformazione non reversibile: la trasformazione AB:

$$\Delta S = \Delta S_{AB,\text{gas}} + \Delta S_{AB,\text{amb}} = nC_v \ln\frac{T_B}{T_A} - \frac{Q_{AB}}{T_B}$$

Il secondo termine riflette il fatto che l'ambiente (la sorgente esterna) cede calore al gas a una temperatura fissa T_B.

Numericamente :

$P_A = 10^5$ Pa ; $T_A = 100$ K ; $V_A = 8.31 * 10^{-3}$ m^3

$P_B = 3*10^5$ Pa ; $T_B = 300$ K ; $V_B = 8.31 * 10^{-3}$ m^3

$P_C = 1.075\cdot10^{-2}$ m^3 ; $T_C = 500$ K ; $V_C = 1.075*10^{-2}$ m^3

$P_D = P_A = 10^5$ Pa ; $T_D = P_DV_D/nR = 291$ K ; $V_D = V_C(P_C/P_D)^{1/\gamma} = 2.42 * 10^{-2}$ Pa

$\alpha = (3*10^5)/8.31*10^3 = 0.36*10^8$ Pa/m^3 ; $Q_{AB} = 3/2 * 8.31 * 200 = 2493$ J ; $\Delta E_{BC} = 3/2 * 8.31 * 200 = 2493$ J

$L_{BC} = (0.36*10^8 /2) * [(1.075\cdot10^{-2})^2-(8.31*10^{-3})^2] = 0.18*10^8 * (1.16*10^{-4} - 6.9*10^{-5}) = 0.18*10^8*4.7*10^{-5} = 0.846 * 10^3 = 846$ J ;

$Q_{BC} = \Delta E_{BC} + L_{BC} = 2493 + 846 = 3339$ J

$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 0 + 846 - 3/2 * 8.31 * (-209) - 8.31*191 = 846 + 2605.2 - 1587.2 = 1864$ J

$\eta = 0.32$

$\Delta S = 3/2 * 8.31 * \ln 3 - 2493/300 = 5.39$ J/K

Esercizio 2

Domanda 1.

Essendoci il vuoto in A, la pressione P_B in B deve essere tale da bilanciare esattamente la forza di gravità agente sul pistone:

$$P_B = \frac{mg}{S}$$

L'equazione di stato dei gas ideali ci fornisce quindi

$$V_B = \frac{nRT_0}{P_B}$$

Domanda 2.

Dopo aver aperto il rubinetto, il pistone soggetto a gravità spinge fuori tutto il gas nella camera B attraverso il tubo, fino ad appoggiarsi sul fondo del cilindro dopo aver spostato tutto il gas nella camera A. A quel punto il volume occupato dal gas è pari al volume dell'intero cilindro, eccettuato il volume occupato dal pistone stesso:

$$V = S(h - d)$$

ed essendo la temperatura rimasta costante la pressione sarà

$$P = \frac{nRT_0}{V} = \frac{V_B}{V} P_B$$

Domanda 3.

Anche se il rubinetto è stato aperto in modo da far passare il gas lentamente, questa trasformazione non è reversibile perchè in nessun punto intermedio il sistema si trova in equilibrio.

La variazione di entropia del gas si ottiene dalla formula per i gas ideali nel caso in cui le temperature degli stati iniziale e finale coincidono:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V}{V_B}.$$

Esercizio 3

Nella macchina di Carnot la quantità di calore scambiata con la sorgente ad alta temperatura è anche pari al calore assorbito dalla macchina stessa. Perciò il lavoro da essa prodotto sarà pari a

$$\eta = W/Q_1 \rightarrow W = \eta Q_1 = 0.6 * 1.5 \cdot 10^3 J = 900\ J$$

Se tale lavoro viene utilizzato per comprimere un gas biatomico lungo la politropica $pV^k = cost.$

(con $k = 2$) a partire dallo stato (p_i, V_i, T_i), allora il lavoro compiuto dal gas lungo tale trasformazione

dovrà essere pari a $-W$.

Se indichiamo con V_f il volume finale della trasformazione, il lavoro fatto dal gas biatomico è pari a

$$W_k = \int_{V_i}^{V_f} pdV = p_i V_i^k \int_{V_i}^{V_f} V^{-k} dV = \frac{p_i}{1-k} V_i^k \left[V^{1-k} \right]_{V_i}^{V_f} = \frac{1}{1-k} \left[p_f V_f - p_i V_i \right].$$

Quindi, dovremo avere

$$W_k = -W \Rightarrow [p_f V_f - p_i V_i] = p_i V_i \left[\frac{p_f V_f}{p_i V_i} - 1 \right] = (k-1)\, W$$

e sostituendo $p_f / p_i = (V_i / V_f)^k$, si ottiene

$$p_i V_i \left[\left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{k-1} - 1 \right] = (k-1) W \Rightarrow \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{k-1} = 1 + \frac{(k-1)}{p_i V_i} W \Rightarrow$$

$$V_f = \frac{V_i}{\left[1 + \frac{(k-1)}{p_i V_i} W \right]^{\frac{1}{k-1}}}$$

Inserendo l'attuale valore di k $(k = 2)$ si ha

$$V_f = \frac{V_i}{\left[1 + \frac{W}{p_i V_i} \right]} = 0.529 * V_i = 5.29\ dm^3,$$

e conseguentemente

$$p_f = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^2 p_i = 3.57\ atm = 3.57 * 1.013 * 10^5 Pa = 3.616\,4 \times 10^5 Pa$$

Notando che è $n = p_i V_i / RT_i = 0.61\ mol$, si ha

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{3.616\,4 \times 10^5 * 5.28 * 10^{-3}}{0.61 * 8.314} = 376.5\ K.$$

Il calore scambiato nella trasformazione lo otteniamo con il primo principio della termodinamica.

$\Delta U = Q - W \Rightarrow Q = \Delta U + W = nc_V(T_f - T) - W = \frac{5}{2} nR(T_f - T_i) - W = 1.34 * 10^3 J.$

Esercizio 4

Trascuriamo ogni effetto della pressione interna delle bolle dovuto alla tensione superficiale. La differenza di pressione agente sulle bolle tra la posizione sul fondo dello stagno e quella in superficie è, per il principio di Stevino:

$$p_1 - p_o = \rho\, g\, h;$$

essendo il processo isotermico, sarà anche

$$p_1\, V_1 = p_o\, V_2,$$

o anche

$$(p_o + \rho\, g\, h)\,\frac{4}{3}\,\pi\, r_1^3 = p_o\,\frac{4}{3}\,\pi\, r_2^3$$

e quindi

$$h = \frac{p_o}{\rho\, g}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1\right] = \frac{10^5}{10^3 \cdot 9,8}\,(1,37 - 1) = 3,8\ \text{m}.$$