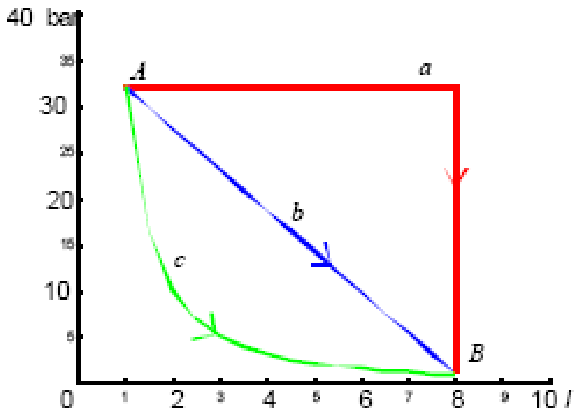
Termodinamica – A. Lascialfari

I prova in itinere – 03/12/2012

Esercizio 1

È data una massa di gas che compie una trasformazione passando da uno stato iniziale A ad uno stato finale B. La trasformazione è schematizzabile nel grafico di figura. Sono possibili 3 differenti percorsi per avere lo stesso risultato: a) una trasformazione isobara seguita da una trasformazione isocora; b) una trasformazione "in linea retta" in cui il volume e la pressione variano linearmente; c) una trasformazione adiabatica dove la dipendenza tra pressione e volume specifico (cioè per unità di massa) del gas è data dalla relazione : $pv^{5/3}$ = cost. Confrontare le varie trasformazioni e calcolare i lavori sviluppati nei tre percorsi sapendo che p_A=32 bar, p_B=1 bar, v_A=1 litro, v_B=8 litri.

[1 bar = 10^5 Pa ; 1 atm = 1.01325 bar]



Esercizio 2

Una mole di gas perfetto monoatomico è inzialmente in equilibrio in uno stato 1, alla temperatura T_1 = (400 + ξ) K in un volume V_1=10^{-2} m^3. A un certo istante il gas viene portato a uno stato 2 da un'espansione adiabatica quasi-statica $1\rightarrow2$. In tale trasformazione il gas compie un lavoro pari a $L_{1\rightarrow2}$ = 800 J. Calcolare il rapporto V_1/V_2, essendo V_2 il volume del gas al termine di tale trasformazione $1\rightarrow2$. A questo punto, tramite la successione di una compressione $2\rightarrow3$ isoterma e una trasformazione $3\rightarrow1$ isocora (entrambe quasi-statiche) il sistema è riportato alle condizioni iniziali. Calcolare il rendimento del ciclo, e la variazione di entropia nelle trasformazioni $1\rightarrow2$ e $2\rightarrow3$.

[ξ=775 ; R = 8.314472 J / (mol · K) ; R = 0.08205784 litri · atm / (mol · K)]

Esercizio 3

Una finestra ha dimensioni della parte vetrata pari a (0.80·1.50) m^2. L'ambiente interno è alla temperatura T_{int} = 20°C e quello esterno a T_{est} = -10°C. Trovare la potenza termica trasmessa attraverso la superficie vetrata e la temperatura della faccia vetrata interna, nei due casi : (1) la finestra ha un vetro singolo spesso 8 mm; (2) la finestra ha due vetri da 4 mm separati da un'intercapedine d'aria ferma spessa 10 mm.

[conducibilità termiche : λ_{vetro} = 0.78 W / (m·K) ; λ_{aria} = 0.026 W / (m·K).

Coefficienti di convezione (scambio) unitari : H_{int} = 10 W / (m^2·K) ; H_{est} = 40 W / (m^2·K)]

Soluzioni I prova itinere – Termodinamica – 03/12/2012

Esercizio 1

Trasformiamo le unità di misura:
p_A=32·10^5 Pa
p_B=1·10^5 Pa
v_A=1·10^{-3}= 0.001 m^3
v_B=8·10^{-3}= 0.008 m^3

Nelle prime due trasformazioni vi è scambio di calore, mentre nella terza non ve ne è, quindi l'equazione del primo principio per il percorso c si riduce a:

$$\Delta u = u_A - u_B = -l_c$$

e sapendo che il lavoro è uguale all'area sottesa alla curva *c (fig. 2)*, avremo:

$$l_c = \int_{v_A}^{v_B} p \cdot dv$$

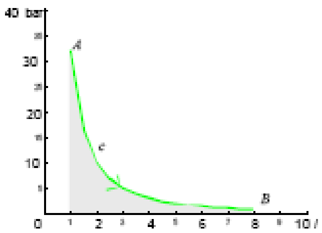


fig. 2

NB: abbiamo espresso il primo principio in grandezze intensive (energia specifica e lavoro specifico) perché non è stato specificata la massa del gas, potevamo anche usare le grandezza estensive (energia e lavoro) considerando una massa di 1 kg.

Per risolvere l'integrale precedente dobbiamo esprimere la pressione in funzione del volume specifico; utilizzando i dati iniziali si ha:

$$pv^{\frac{5}{3}} = p_A v_A^{\frac{5}{3}} = p_B v_B^{\frac{5}{3}}$$

quindi

$$p = \frac{p_A v_A^{\frac{5}{3}}}{v^{\frac{5}{3}}}$$

e integrando

$$l_c = p_A v_A^{\frac{5}{3}} \int_{v_A}^{v_B} v^{-\frac{5}{3}} \cdot dv = p_A v_A^{\frac{5}{3}} \cdot \left\langle -\frac{3}{2} v^{-\frac{2}{3}} \right\rangle_{v_A}^{v_B} =$$

$$= p_A v_A^{\frac{5}{3}} \left(-\frac{3}{2} v_B^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{2} v_A^{-\frac{2}{3}} \right) =$$

$$= p_A v_A^{\frac{5}{3}}\left(-\frac{3}{2}v_B^{-\frac{2}{3}}\right) + p_A v_A^{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{2}v_A^{-\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= p_B v_B^{\frac{5}{3}}\left(-\frac{3}{2}v_B^{-\frac{2}{3}}\right) + p_A v_A^{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{2}v_A^{-\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(p_A v_A - p_B v_B\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(32 \cdot 10^5 \cdot 0.001 - 10^5 \cdot 0.008\right) = 3600 \text{ J}$$

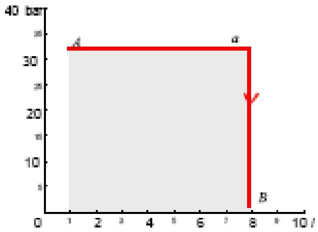


fig. 3

Si noti che il lavoro è positivo, infatti viene fatto sull'esterno. La variazione dell'energia è Δu = -3600 J.

Per il percorso *a* possiamo scrivere:

$$\Delta u = q_a - l_a$$

e il lavoro è dato dall'area sotto il grafico di *fig.3*

$$l_a = p_A \cdot (v_B - v_A) = 32 \cdot 10^5 \cdot (0.008 - 0.001) = 22400 \text{ J}$$

e il calore scambiato è

$$q_a = l_a + \Delta u = 22400 - 3600 = 18800 \text{ J}$$

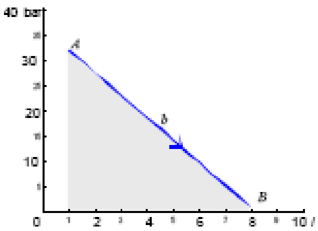


fig. 4

Per il percorso *b* si ha che:

$$\Delta u = q_b - l_b$$

il lavoro è *(fig. 4)*

$$l_b = \frac{p_B + p_A}{2} \cdot (v_B - v_A) = 11550 \text{ J}$$

e il calore scambiato è

$$q_b = l_b + \Delta u = 11550 - 3600 = 7950 \text{ J}$$

Esercizio 2

Nella trasformazione adiabatica quasi-statica 1

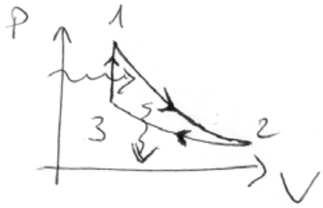
$1 \to 2$ vale la formula di Poisson:

$$pV^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \qquad (\gamma = 5/3)$$

Il lavoro compiuto si può quindi scrivere:

$$L_{1\to 2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p_1 V_1^{5/3} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{5/3}} = p_1 V_1^{5/3} \int_{V_1}^{V_2} V^{-5/3}\,dV =$$

$$= p_1 V_1^{5/3} \left[\frac{V^{-2/3}}{-2/3} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} \right]$$



Utilizzando $p_1 V_1 = nRT_1$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} = 1 - \frac{2}{3} \frac{L_{1\to 2}}{nRT_1}$$

cioè:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{L_{1\to 2}}{nRT_1}\right)^{3/2} = 0.919236$$

Ora, per calcolare il rendimento dobbiamo trovare i calori scambiati in $2 \to 3$ e $3 \to 1$.

La temperatura dello stato 2 è:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} = T_1 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{L_{1\to 2}}{nRT_1}\right) =$$

$$= 1110.86\ \text{K}$$

La Trasformazione $2 \to 3$ è isoterma e | 2 |

quindi: $0 = \Delta U_{2\to 3} = Q_{2\to 3} - L_{2\to 3}$

$$Q_{2\to 3} = L_{2\to 3} = \int_{V_2}^{V_3} p\,dV = \int_{V_2}^{V_3} nRT_2 \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} < 0$$

(il calore è ceduto).

Per Trovare $Q_{3\to 1}$, consideriamo che $\Delta U_{ciclo} = 0$,

da cui:

$$Q_{1\to 2} + Q_{2\to 3} + Q_{3\to 1} = L_{1\to 2} + L_{2\to 3} + L_{3\to 1}$$

$$\Rightarrow Q_{3\to 1} = L_{1\to 2} = 800\ J > 0$$

(il calore è assorbito).

Il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{2\to 3}|}{|Q_{3\to 1}|} = 1 + \frac{nRT_2 \ln\frac{V_1}{V_2}}{L_{1\to 2}} =$$

$$= 0.0278$$

La variazione di entropia è:

$$\Delta S_{1\to 2} = 0 \qquad (Q = 0)$$

$$\Delta S_{2\to 3} = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_2} Q_{2\to 3} = \frac{1}{\cancel{T_2}} nR\cancel{T_2} \ln\frac{V_1}{V_2} =$$

$$= 8.31 \ln(0.919236) = -0.7\ \frac{J}{K}$$

Esercizio 3

3

(1) Si devono considerare sia la trasmissione per conduzione (vetro) che quella per convezione (interno ed esterno). Nel caso conduttivo si può scrivere:

$$F = H_v (T_1 - T_2)$$

T_1 = temp. delle vetrate interne

$$H_v = \frac{\lambda_v}{d_v}$$

T_2 = temp. delle vetrate esterne

Inoltre si può scrivere che vale:

$$(*) \qquad \frac{1}{H} = \frac{1}{H_i} + \frac{1}{H_v} + \frac{1}{H_e} = \frac{1}{10} + \frac{0.008}{0.78} + \frac{1}{40} =$$

$$= 0.135 \frac{K \cdot m^2}{W} \Rightarrow H = 7.407 \frac{W}{K \cdot m^2}$$

Considerando la potenza termica totale trasmessa a causa di conduzione termica e moti convettivi:

$$\frac{P}{S} = H (T_i - T_e) \Longrightarrow (S = 1.2 \, m^2)$$

$$\Longrightarrow P = S \cdot H (T_i - T_e) \simeq 266.7 \, W$$

Inoltre: $(T_i - T_1) \cdot H_i \cdot S = 266.7 \, W \Rightarrow T_1 = -2.22 °C$

(2) Nell'equazione $(*)$ H_v viene sostituito da H_{va}:

$$\frac{1}{H_{va}} = \frac{d_{v_1}}{\lambda_v} + \frac{d_a}{\lambda_a} + \frac{d_{v_2}}{\lambda_v} = \frac{0.004}{0.78} + \frac{0.01}{0.026} + \frac{0.004}{0.78} =$$

$$= 0,395 \frac{K \cdot m^2}{W}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{10} + 0.395 + \frac{1}{40} = 0,52 \frac{K \cdot m^2}{W}$$

$$\Longrightarrow P = S \cdot H (T_i - T_e) = 69.2 \, W$$

Inoltre: $(T_i - T_1) \cdot H_i \cdot S = 69.2 \, W \Rightarrow T_1 = 14.2 °C$