MECCANICA

- STATICA
- CINEMATICA
- DINAMICA

CINEMATICA

DESCRIVE IL MOTO INDIPENDENTEMENTE DALLE CAUSE CHE LO PRODUCONO O LO MODIFICANO

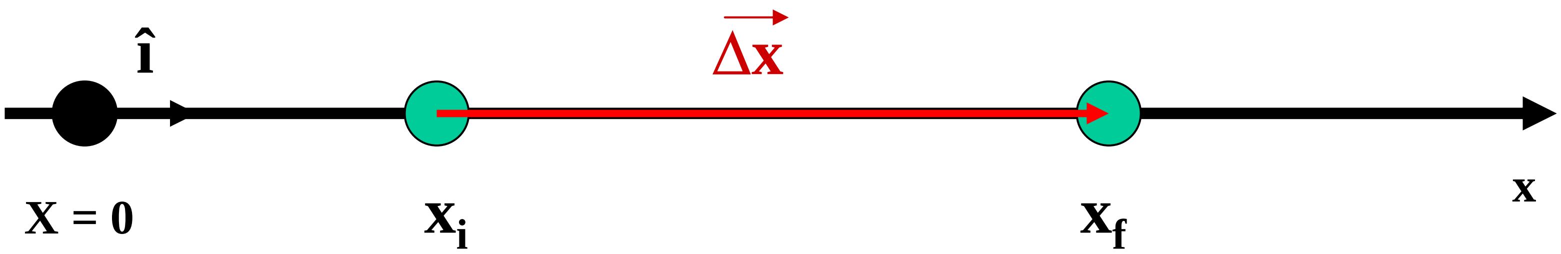
DINAMICA

STUDIA IL MOTO IN RELAZIONE ALLE CAUSE (FORZE) CHE LO PRODUCONO O LO MODIFICANO

PUNTO MATERIALE: corpo di dimensioni trascurabili rispetto agli spostamenti che si considerano

MOTO IN UNA DIMENSIONE

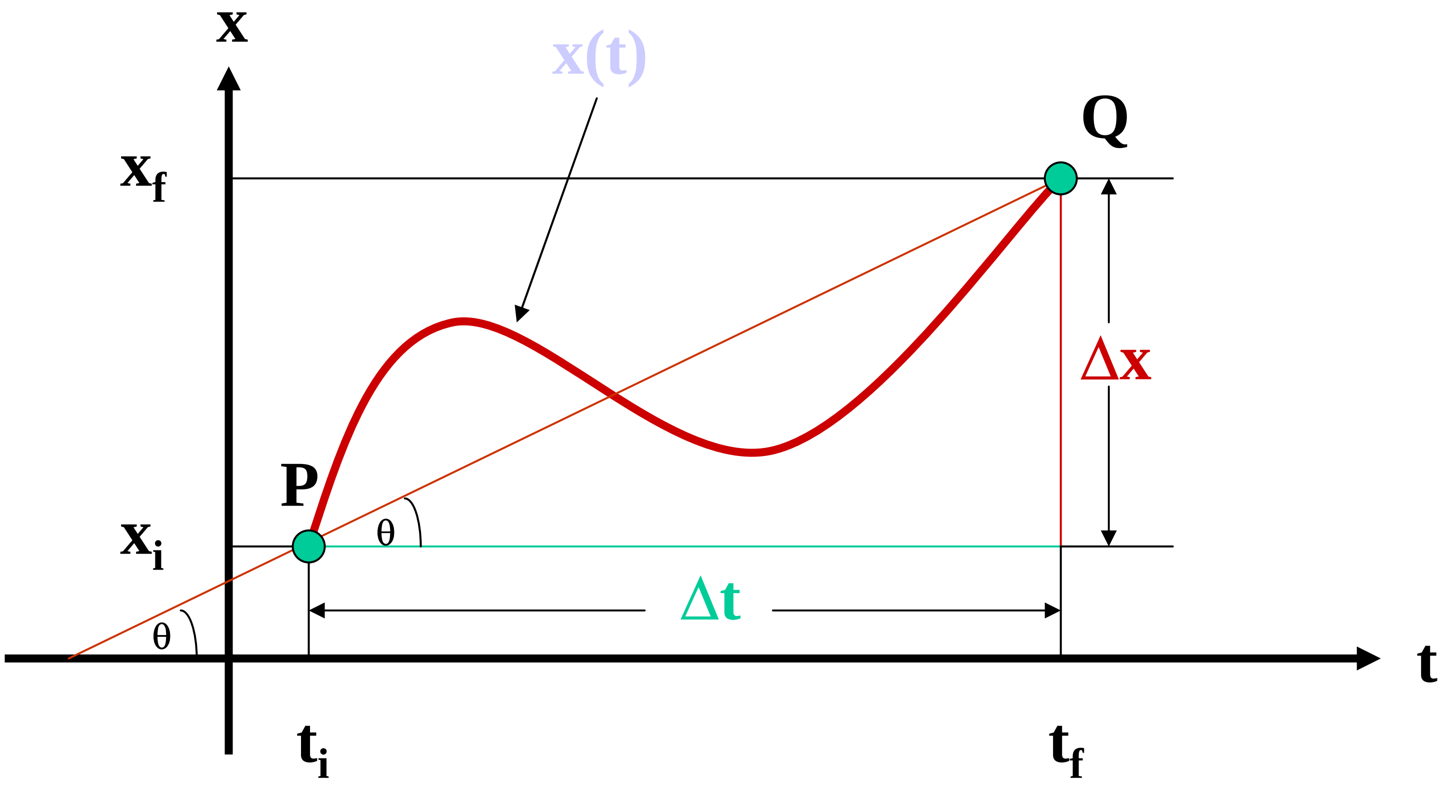
Velocità media



$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\,\hat{i}}{(t_f - t_i)} \qquad \frac{[L]}{[T]} \qquad \frac{m}{s}$$

Piano x-t $x = x(t) \equiv$ **legge oraria** **posizione istante per istante**

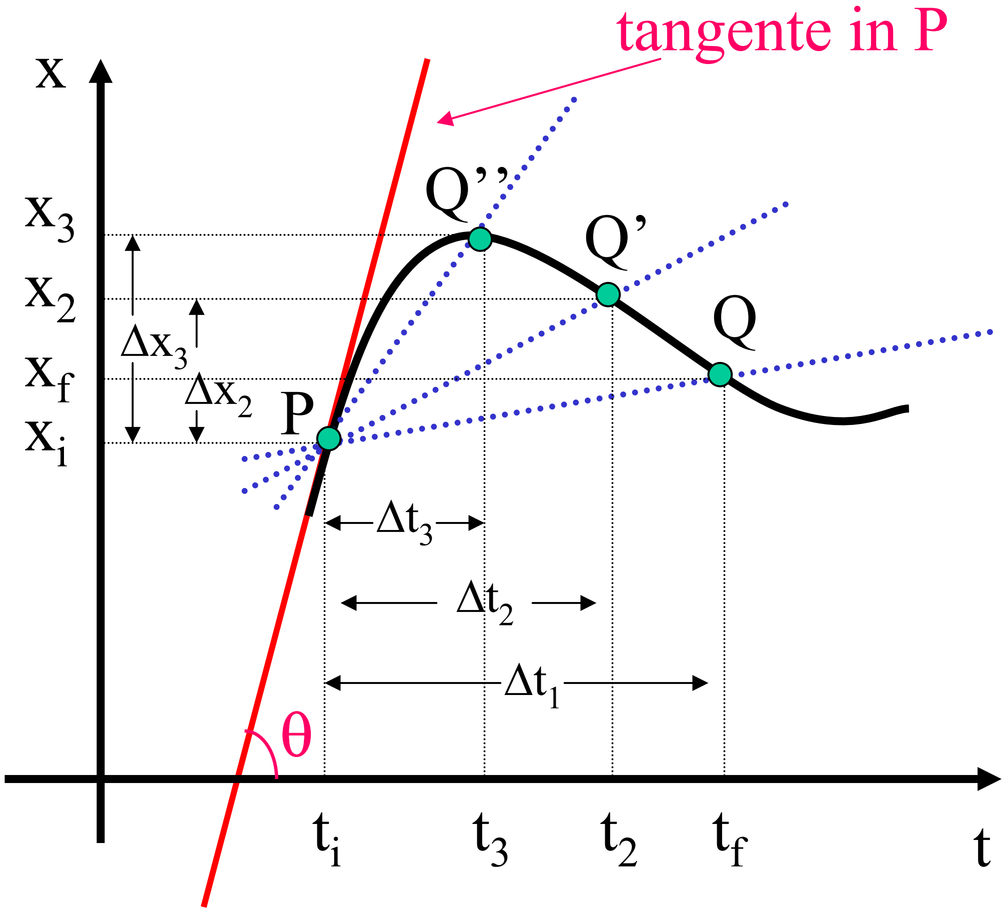
x_1	t_1
x_2	t_2
x_3	t_3
…	…
x_n	t_n



Velocità media

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \mathrm{tg}\,\theta\ \hat{\mathbf{i}}$$

Velocità istantanea



$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

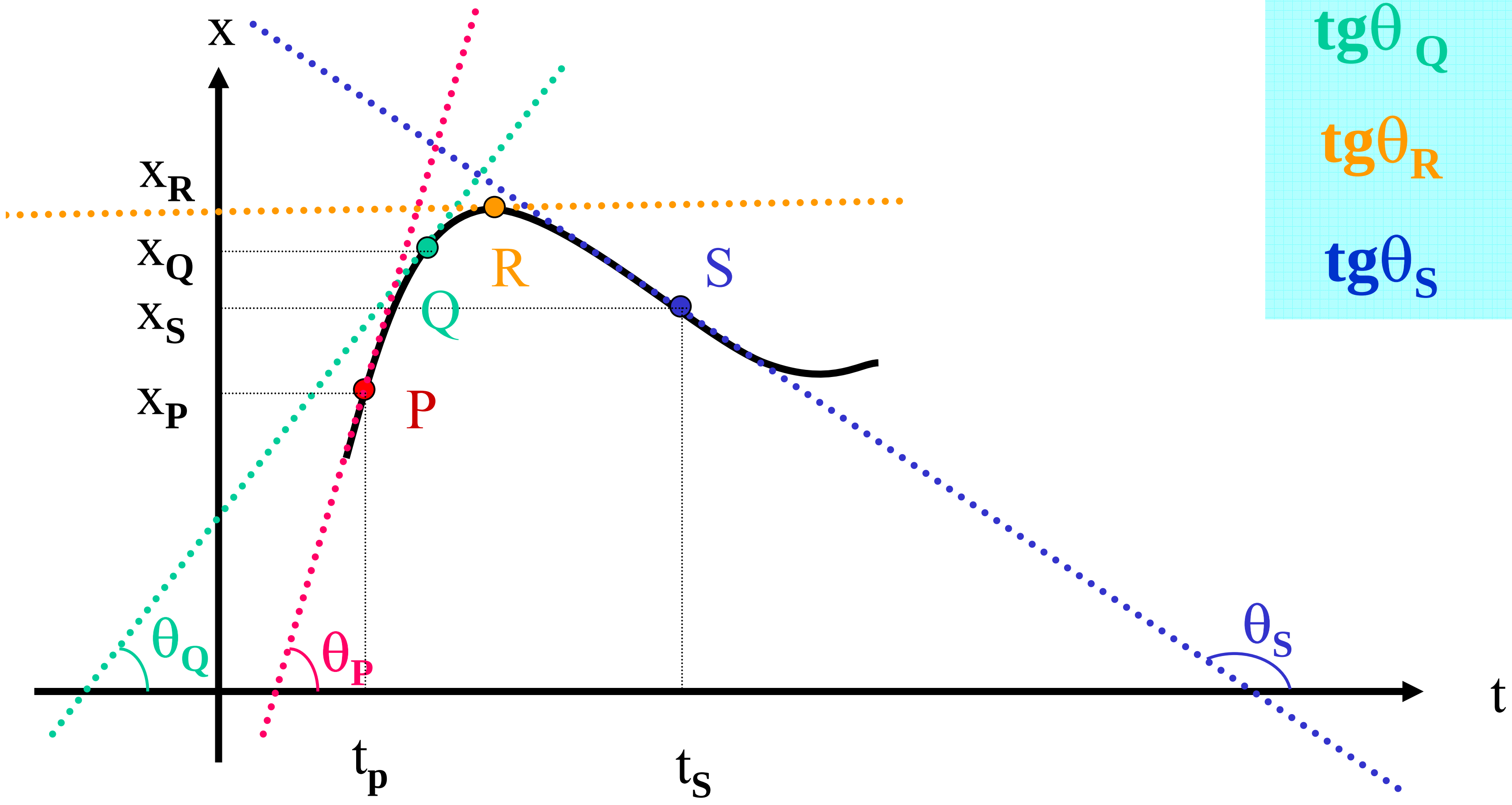
$$= \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Direzione data dalla retta del moto rettilineo

Verso dato dal segno di tg θ

Velocità istantanea = $\vec{v}_i$ = tg θ î

Velocità istantanea $\vec{v_i} = \text{tg}\,\theta\,\hat{\imath}$



$\text{tg}\theta_P > 0$

$\text{tg}\theta_Q > 0$

$\text{tg}\theta_R = 0$

$\text{tg}\theta_S < 0$

Parte da x_P, arriva in x_R dove si ferma e torna indietro

ACCELERAZIONE: variazione di $\vec{v}$ nell'unità di tempo

Accelerazione media

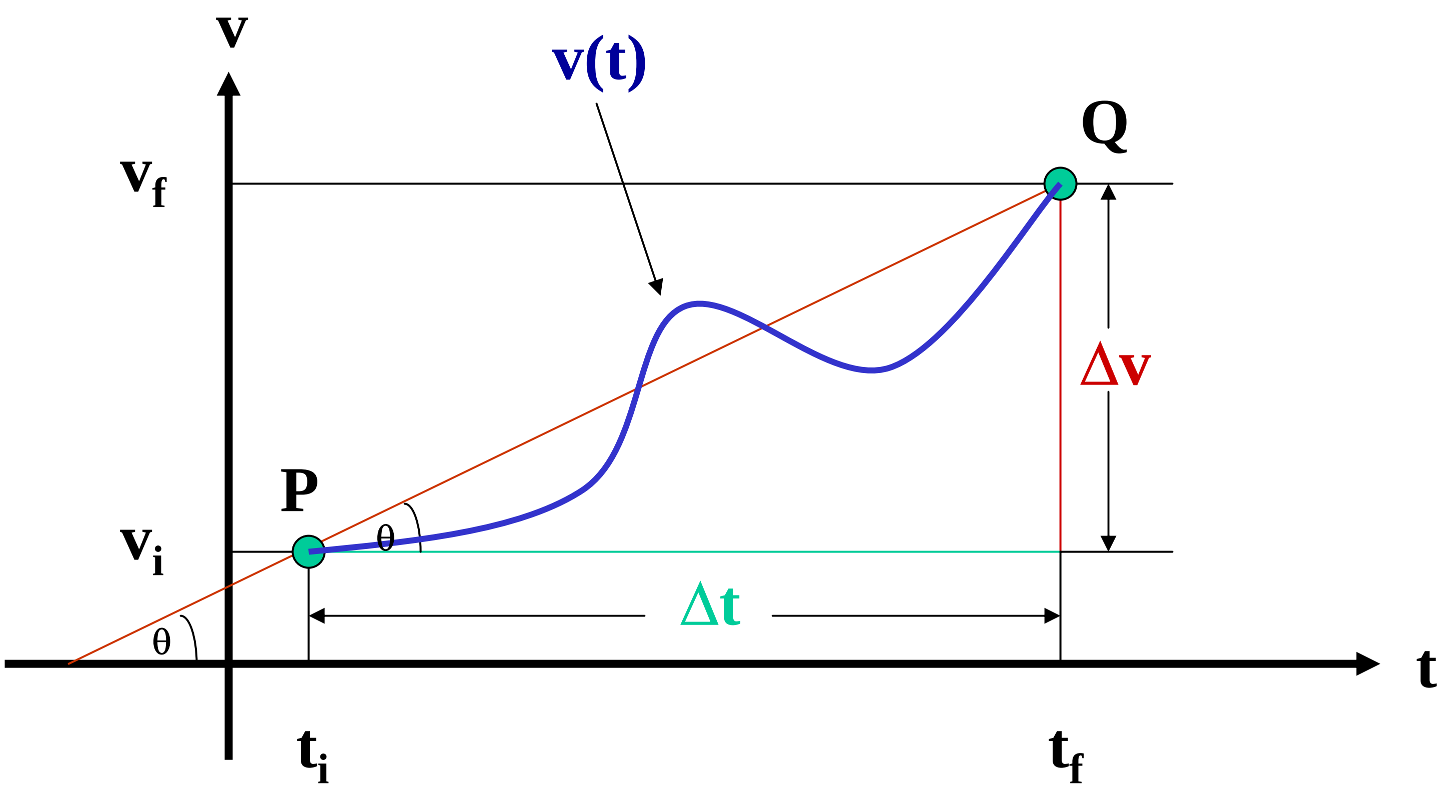
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{(t_f - t_i)} \qquad \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} \qquad \frac{m}{s^2}$$

Accelerazione istantanea

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Piano v-t $\quad v = v(t) \equiv$ **velocità istantanea**

v_1	t_1
v_2	t_2
v_3	t_3
…	…
v_n	t_n



$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \mathrm{tg}\,\theta\,\hat{\imath}$$

ALCUNI ESEMPI

Moto Rettilineo uniforme

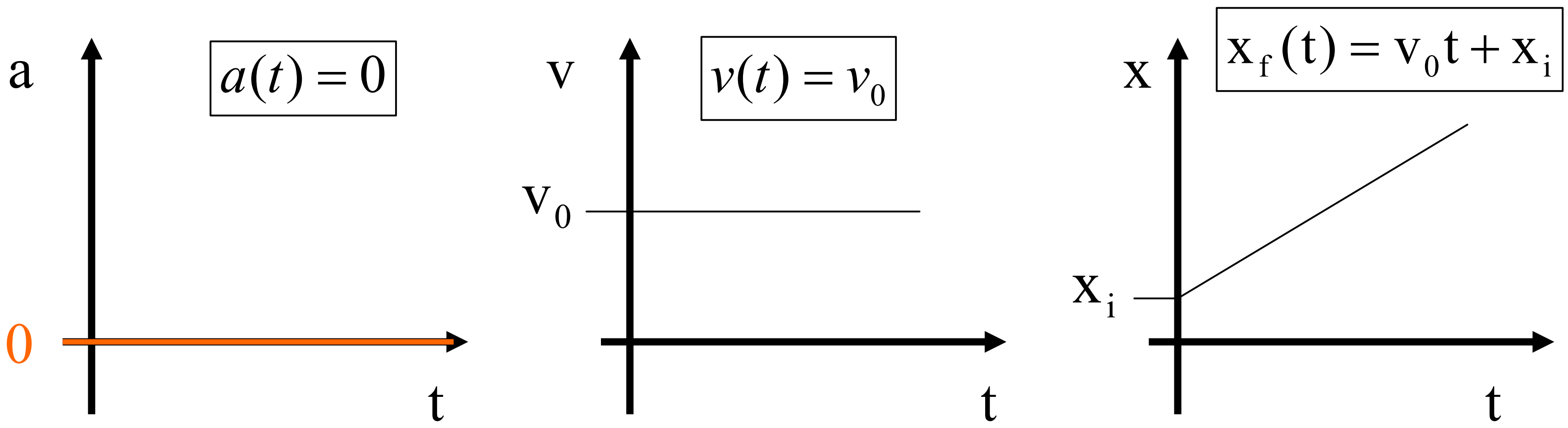
$$a = 0$$

$$v = v_0 = \text{cost.}$$

$$\mathrm{v}_0 = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \mathrm{v}_0 \mathrm{dt} = \mathrm{dx} \Rightarrow$$

$$\int_0^t \mathrm{v}_0 \mathrm{dt}' = \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{dx}' \Rightarrow \mathrm{v}_0 \mathrm{t} = \mathrm{x}_f - \mathrm{x}_i$$

Legge oraria ⇒ $\boxed{\mathrm{x}_f = \mathrm{x}_i + \mathrm{v}_0 \mathrm{t}}$



Moto uniformemente accelerato

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{cost.} \Rightarrow \quad adt = dv \Rightarrow$$

$$\int_0^t adt' = \int_{v_i}^{v_f} dv' \Rightarrow \mathrm{at} = v_f - v_i \qquad v_f(t) = v_i + at = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

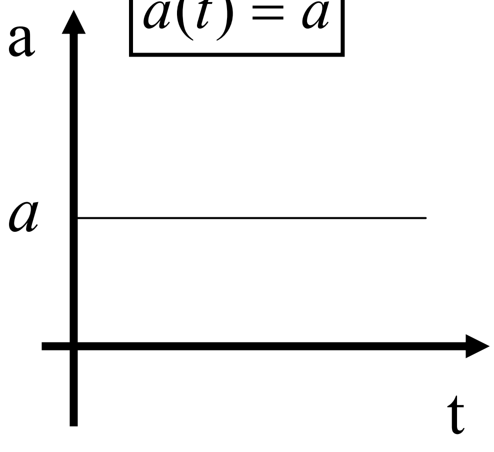
$$v_i dt + atdt = dx \quad \Rightarrow \int_0^t v_i dt' + \int_0^t at'dt' = \int_{x_i}^{x_f} dx' \Rightarrow \quad v_i t + \frac{1}{2}at^2 = x_f - x_i$$

$$\boxed{x_f(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2}$$

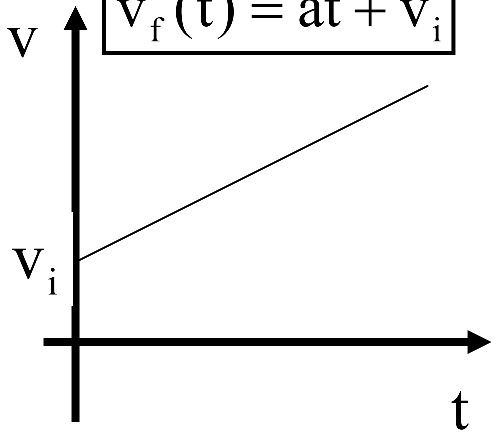
Legge oraria

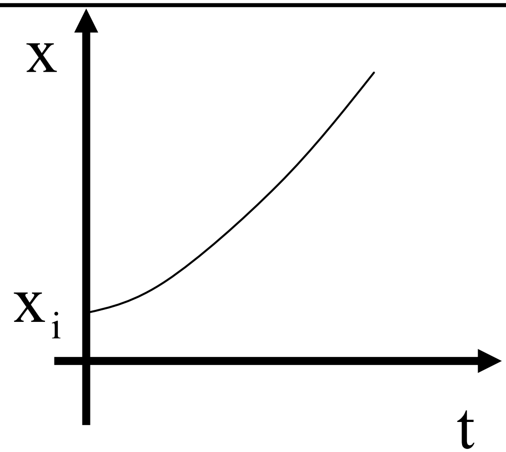
$$\boxed{x_f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_i t + x_i}$$

$$\boxed{a(t) = a}$$



$$\boxed{v_f(t) = at + v_i}$$





Esempio

$$x(t)$$

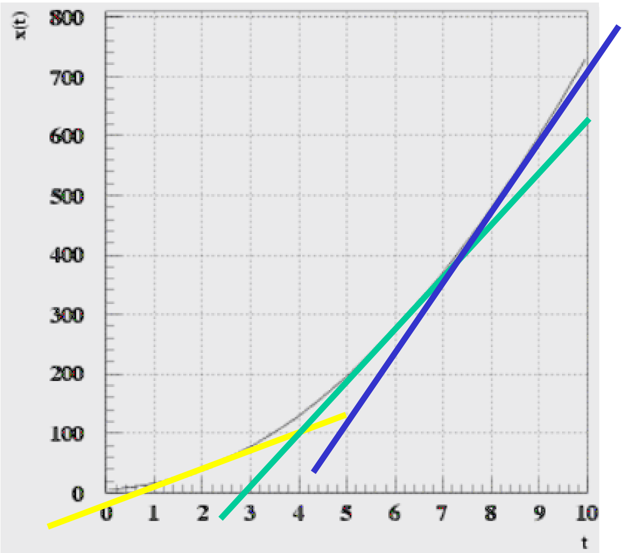
$$x(t) = 5 + 3t + 7t^2$$

$$v_x = \frac{d}{dt}x(t)$$

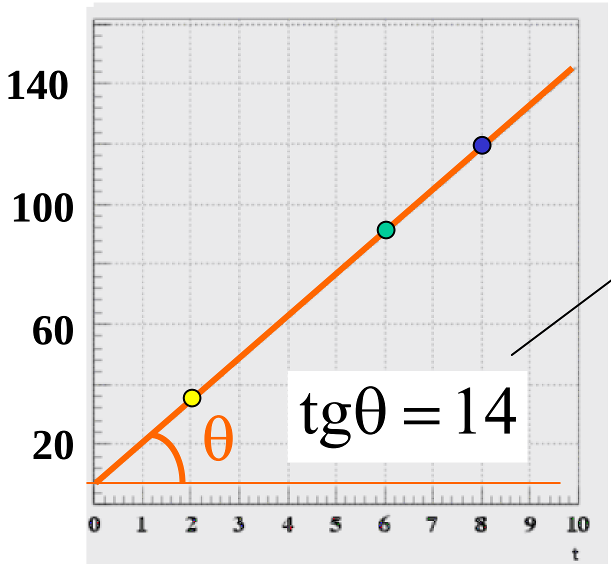
$$v_x = \frac{d}{dt}x(t) = 3 + 14t$$

$$a_x = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

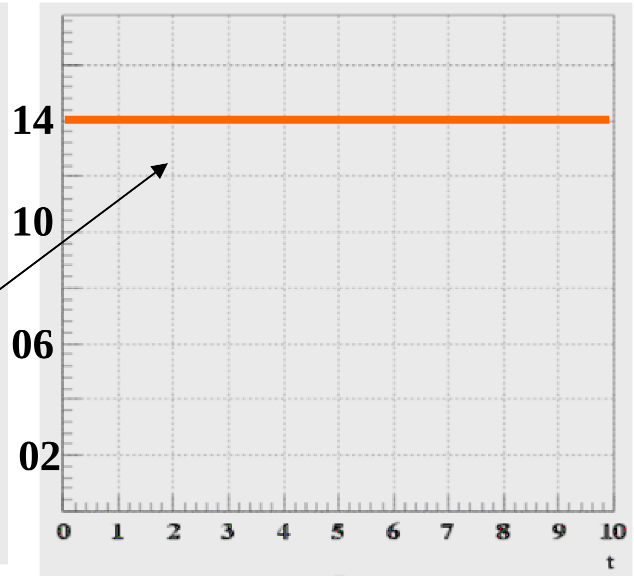
$$a_x = \frac{d}{dt}v_x(t) = 14$$



$$x(t) = 5 + 3t + 7t^2$$



$$v_x = 3 + 14t$$



$$a_x = 14$$

Moto uniformemente accelerato: velocità funzione dello spazio

$$\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{v_f - v_i}{a} \\ x_f - x_i = v_i \frac{(v_f - v_i)}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v_f - v_i)^2}{a^2} \end{cases}$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{a}(v_f - v_i)\left(v_i + \frac{1}{2}v_f - \frac{1}{2}v_i\right)$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{a}(v_f - v_i)\left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_f\right)$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2a}(v_f - v_i)(v_i + v_f) = \frac{v_f^{\,2} - v_i^{\,2}}{2a} \longrightarrow$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2a}(v_f - v_i)(v_i + v_f) = \frac{v_f^{\,2} - v_i^{\,2}}{2a}$$

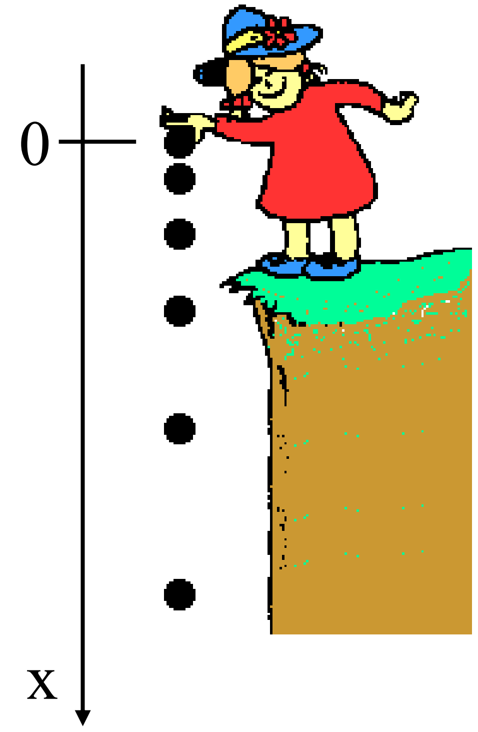
$$v_f^{\,2} = v_i^{\,2} + 2a(x_f - x_i)$$

$$v_f = \sqrt{v_i^{\,2} + 2a(x_f - x_i)}$$

se $\begin{matrix} x_i = 0 \\ v_i = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} v_f^{\,2} = 2ax \\ v_f = \sqrt{2ax} \end{cases}$

Esempio

Un corpo è lasciato cadere da un'altezza di 10 m. Con quale velocità raggiunge il suolo? (Si trascuri l'attrito dell'aria.)



$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2a(x_f - x_i)}$$

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$x_0 = 0$$

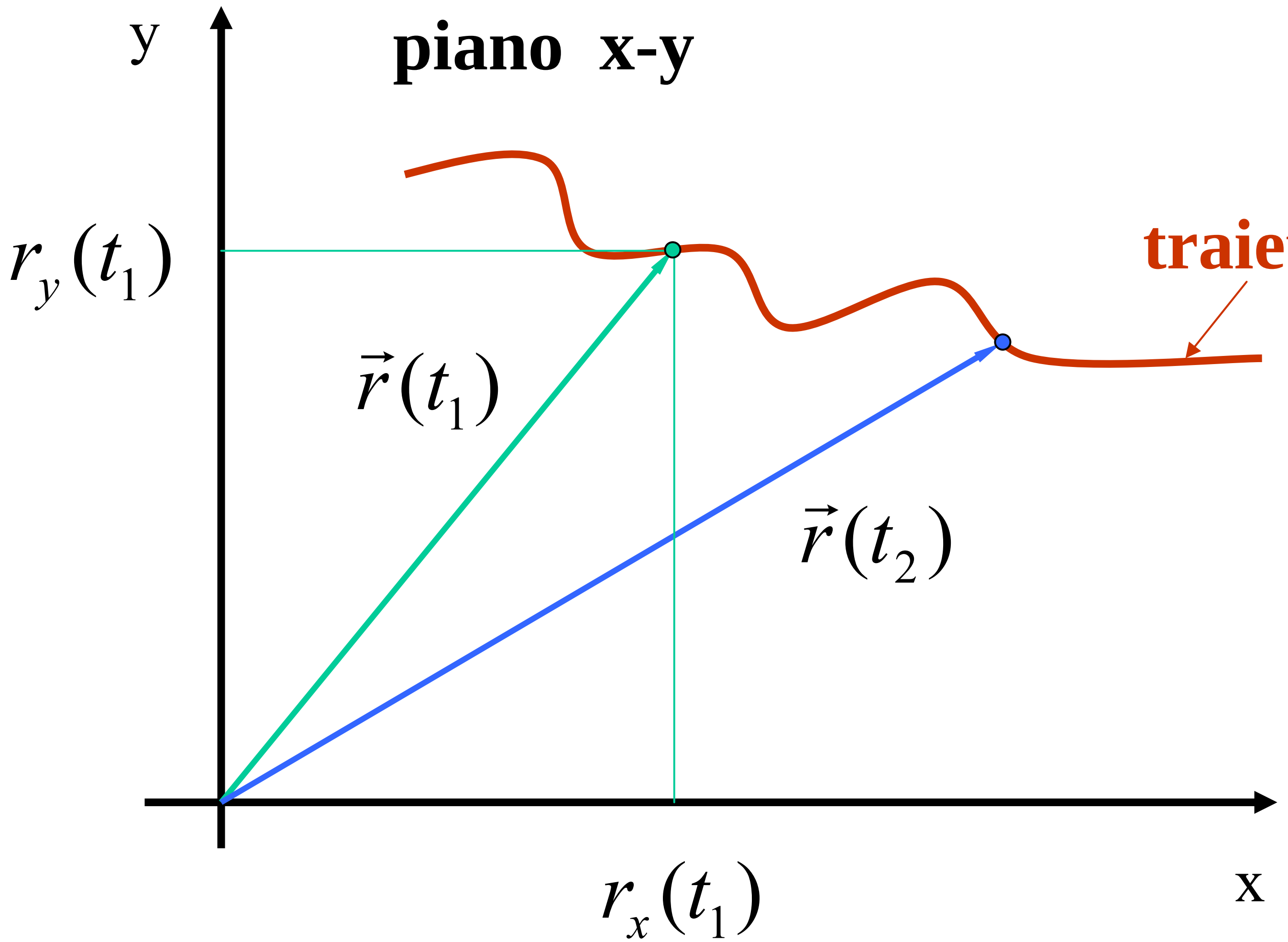
$$v_0 = 0$$

$$v = \sqrt{2gx} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10} = 14 m/s$$

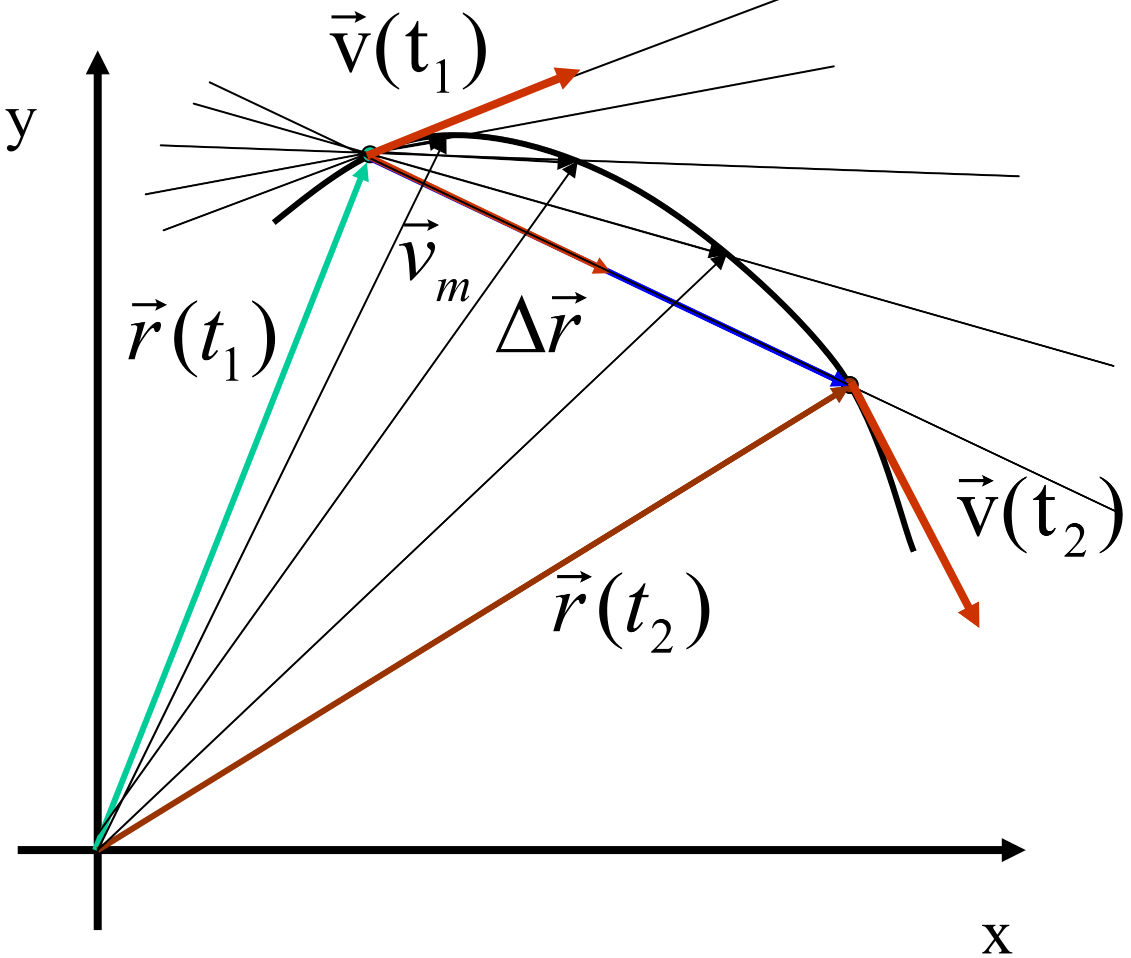
Moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} a(t) = a = \text{cost.} \\ v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \dfrac{1}{2} a t^2 \\ v_f = \sqrt{v_i^{\,2} + 2a\left(x_f - x_i\right)} \end{cases}$$

MOTO IN DUE DIMENSIONI



Velocità



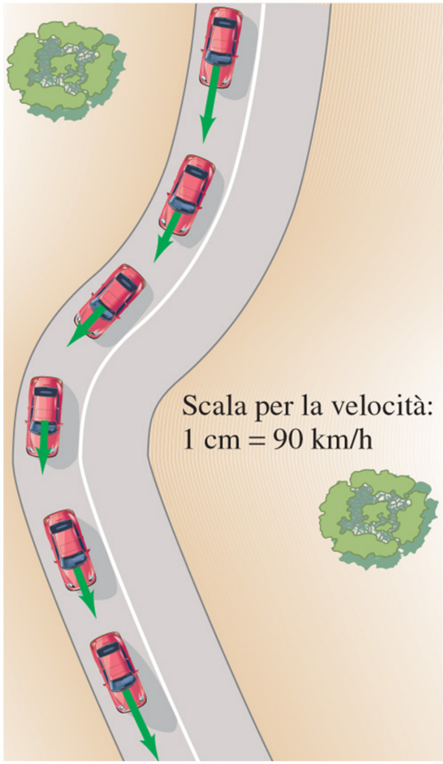
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

$$\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}$$

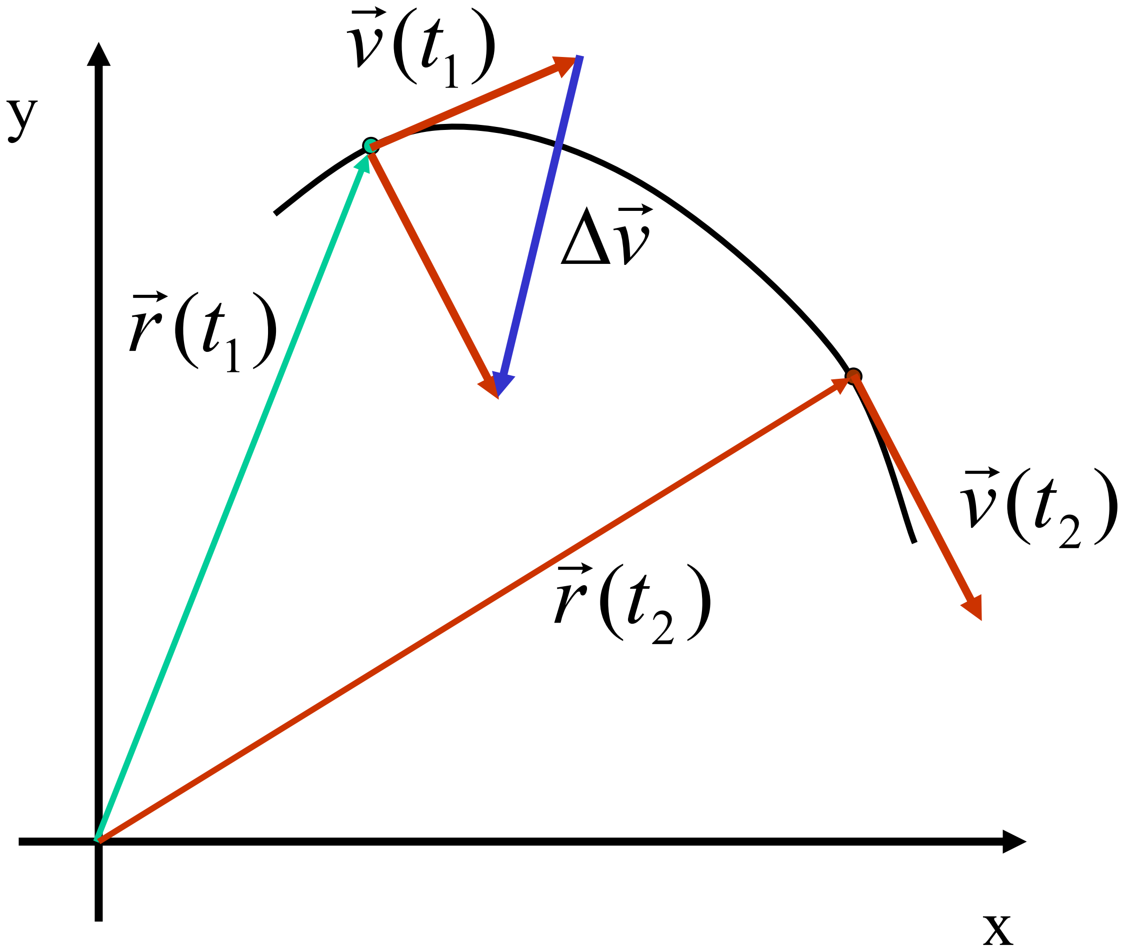
VELOCITA' IN DUE DIMENSIONI



Fisica

Accelerazione

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

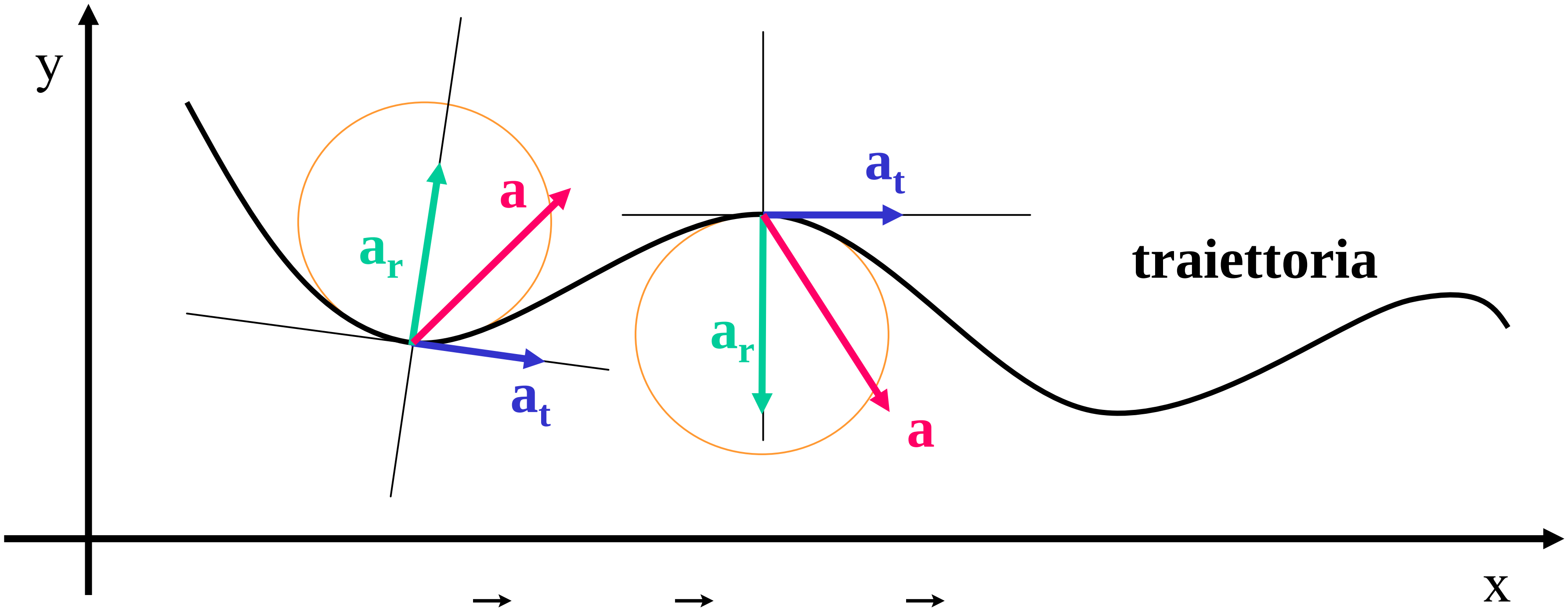


$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

$$\vec{a}_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt}$$

accelerazione tangenziale e radiale



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$\vec{a}_t$ acc. tangenziale

$\vec{a}_r$ acc. radiale

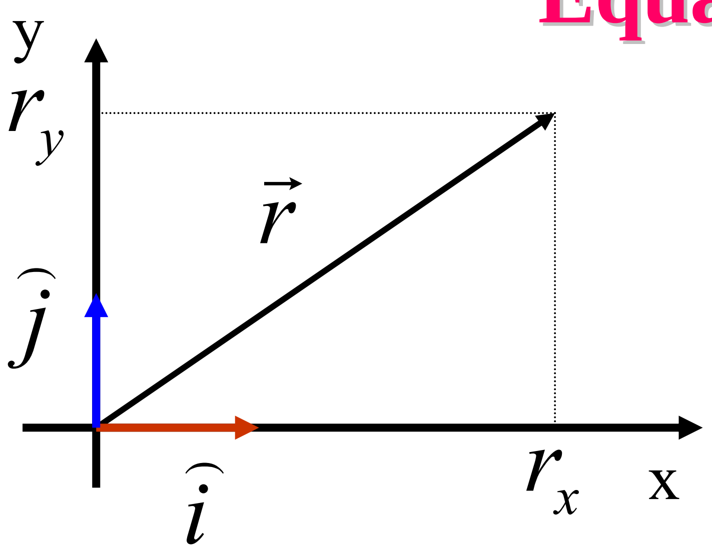
cambia

modulo velocità

direzione velocità

MOTO DEL PROIETTILE

Equazioni vettoriali



$$\vec{r} = r_x \widehat{i} + r_y \widehat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\widehat{i} + \frac{dr_y}{dt}\widehat{j} = v_x \widehat{i} + v_y \widehat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\widehat{i} + \frac{dv_y}{dt}\widehat{j} = a_x \widehat{i} + a_y \widehat{j}$$

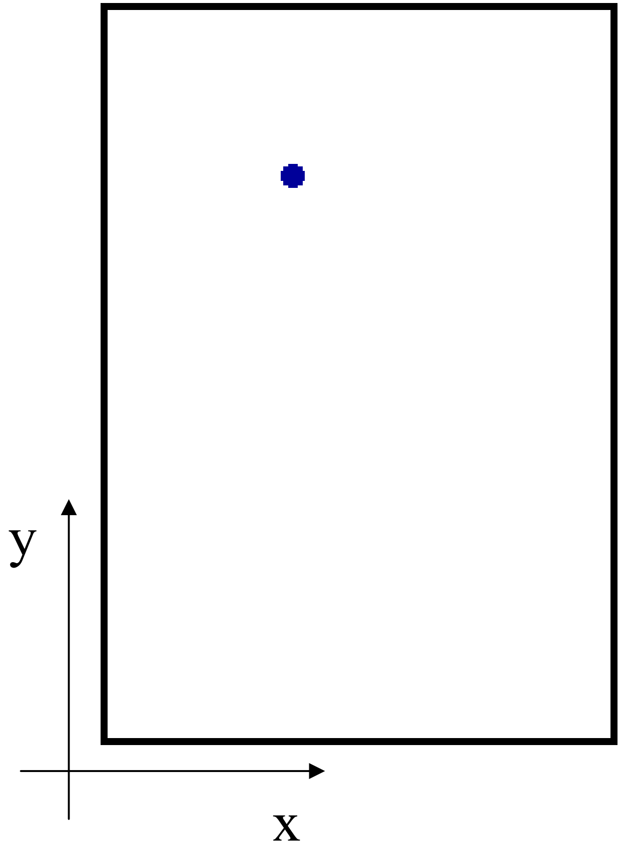
$$\vec{r} \rightarrow \begin{cases} r_x \\ r_y \\ r_z \end{cases} \quad \vec{v} \rightarrow \begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \end{cases} \quad \vec{a} \rightarrow \begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases}$$

Esempio: la velocità nel moto uniformemente accelerato

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \Rightarrow \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \\ v_{zf} = v_{zi} + a_z t \end{cases}$$

MOTO DEL PROIETTILE

$$\begin{cases} a_y = -g \\ v_{yf} = v_{yi} - gt \\ y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

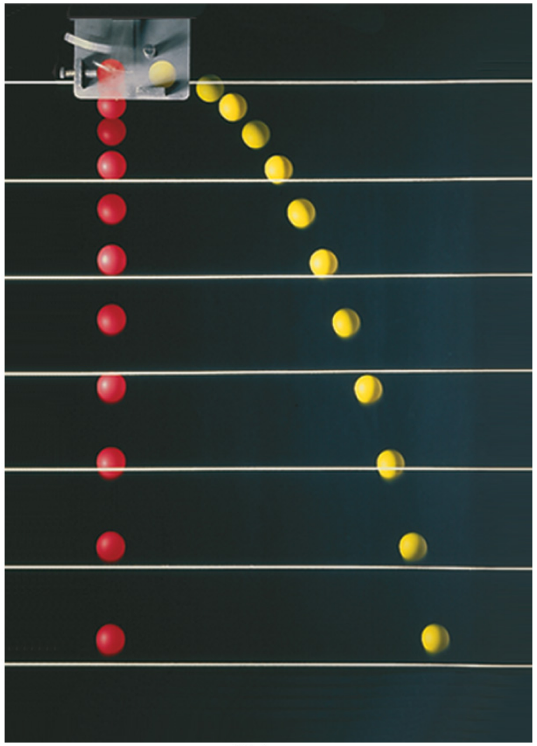


$$\begin{cases} v_x = v_{xi} \\ x_f = x_i + v_{xi}t \end{cases}$$

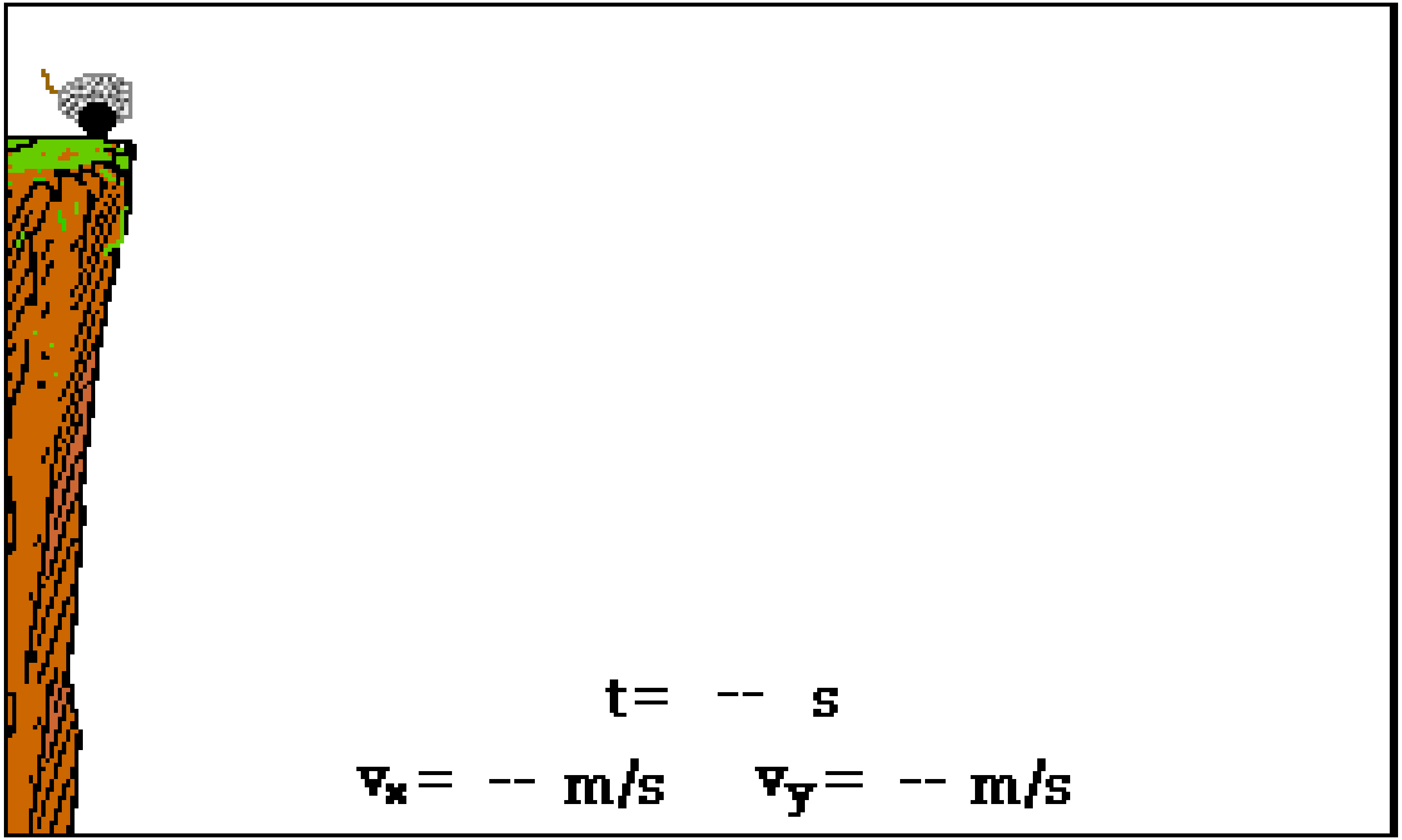
- accelerazione g costante verso il basso
- no resistenza aria

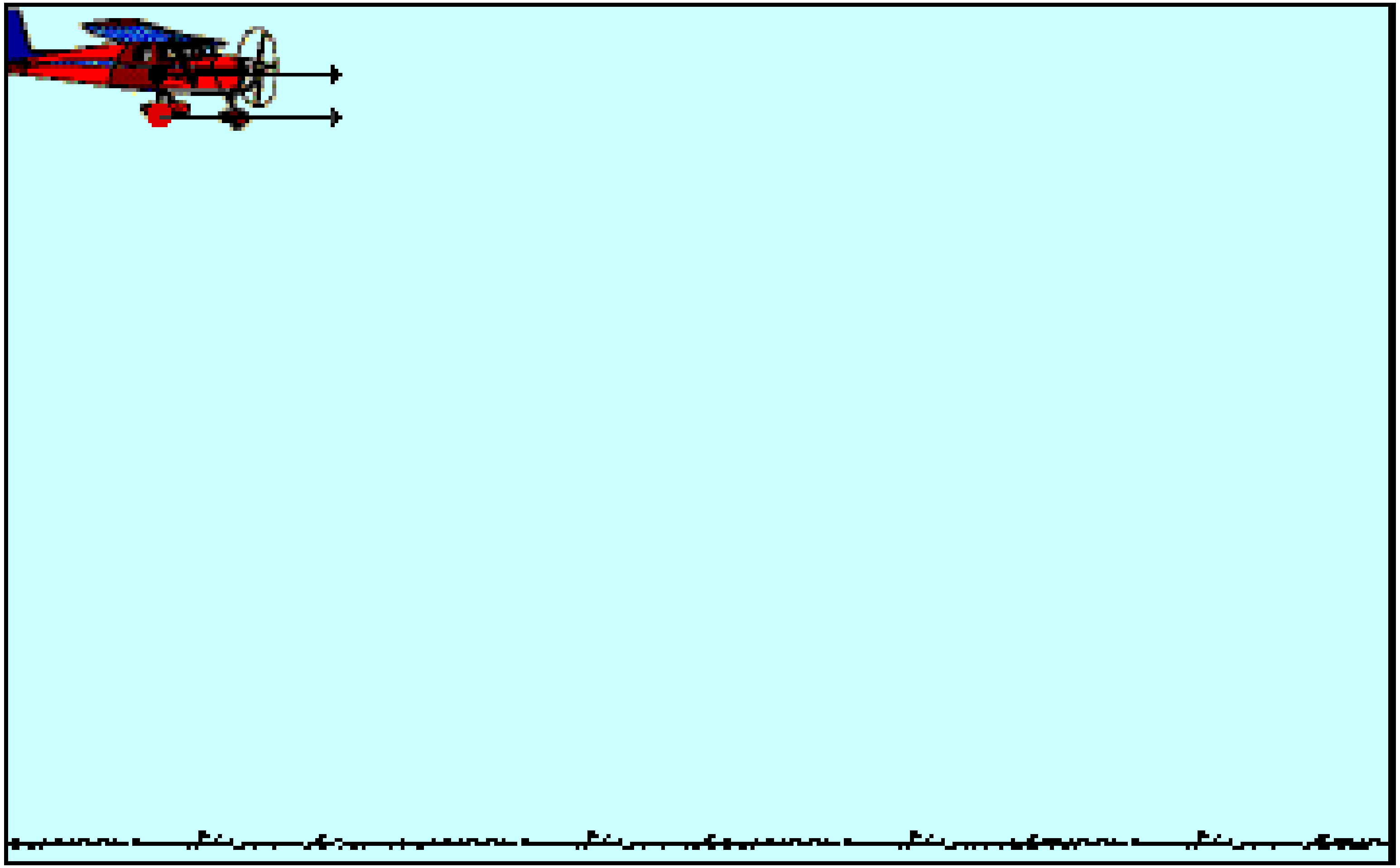
$\longrightarrow$ **traiettoria parabolica**

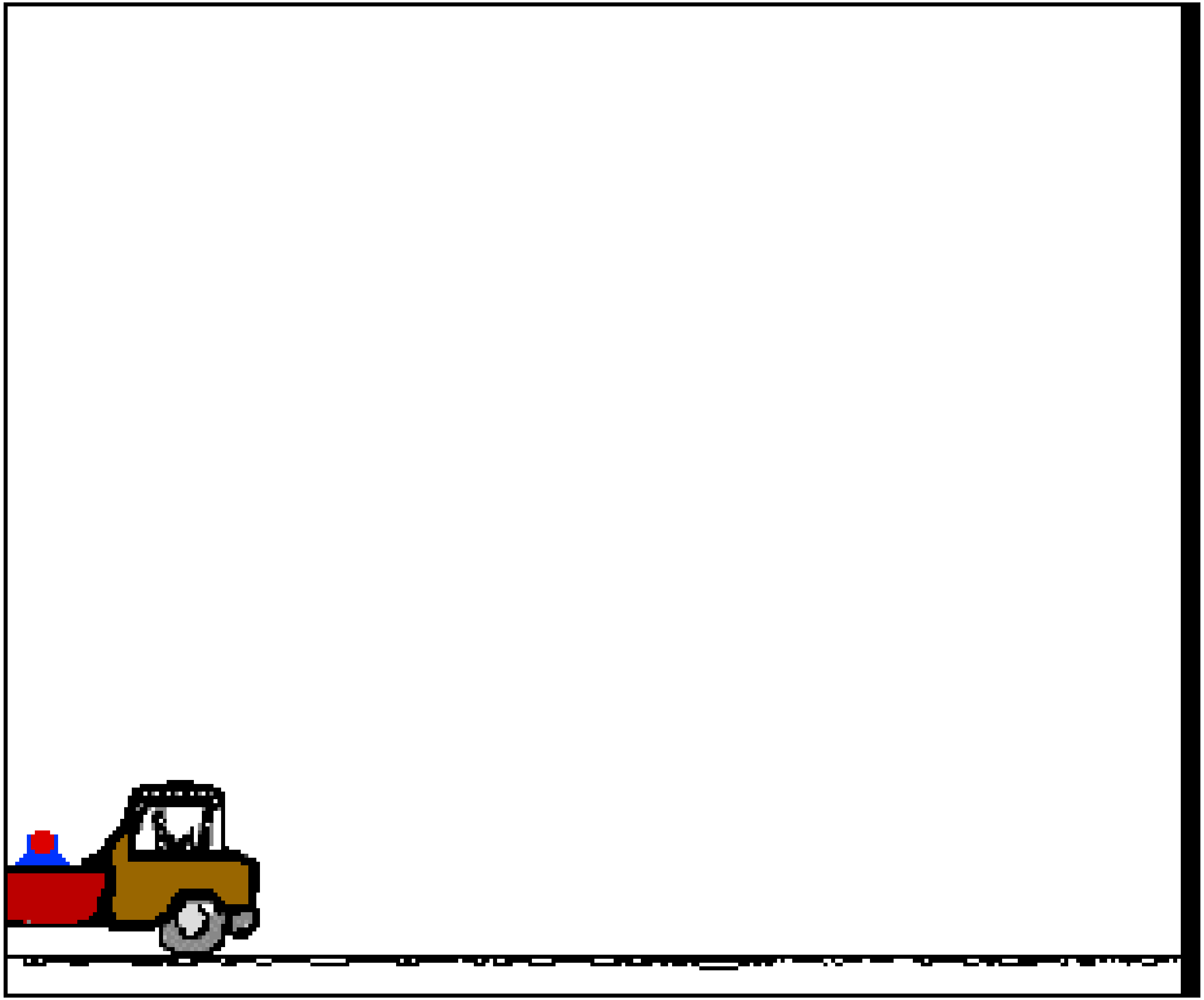
MOTO DEL PROIETTILE

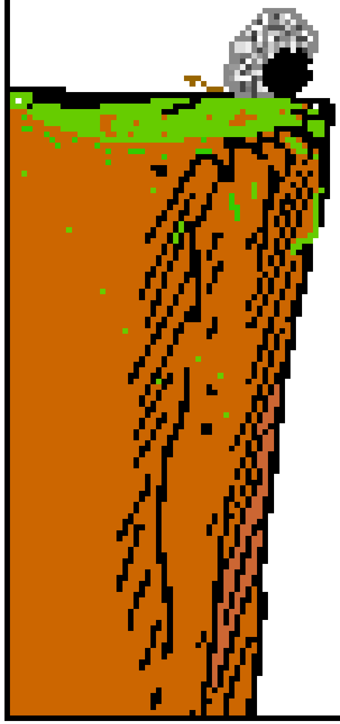


Fisica


t= -- s
vx= -- m/s
vy= -- m/s

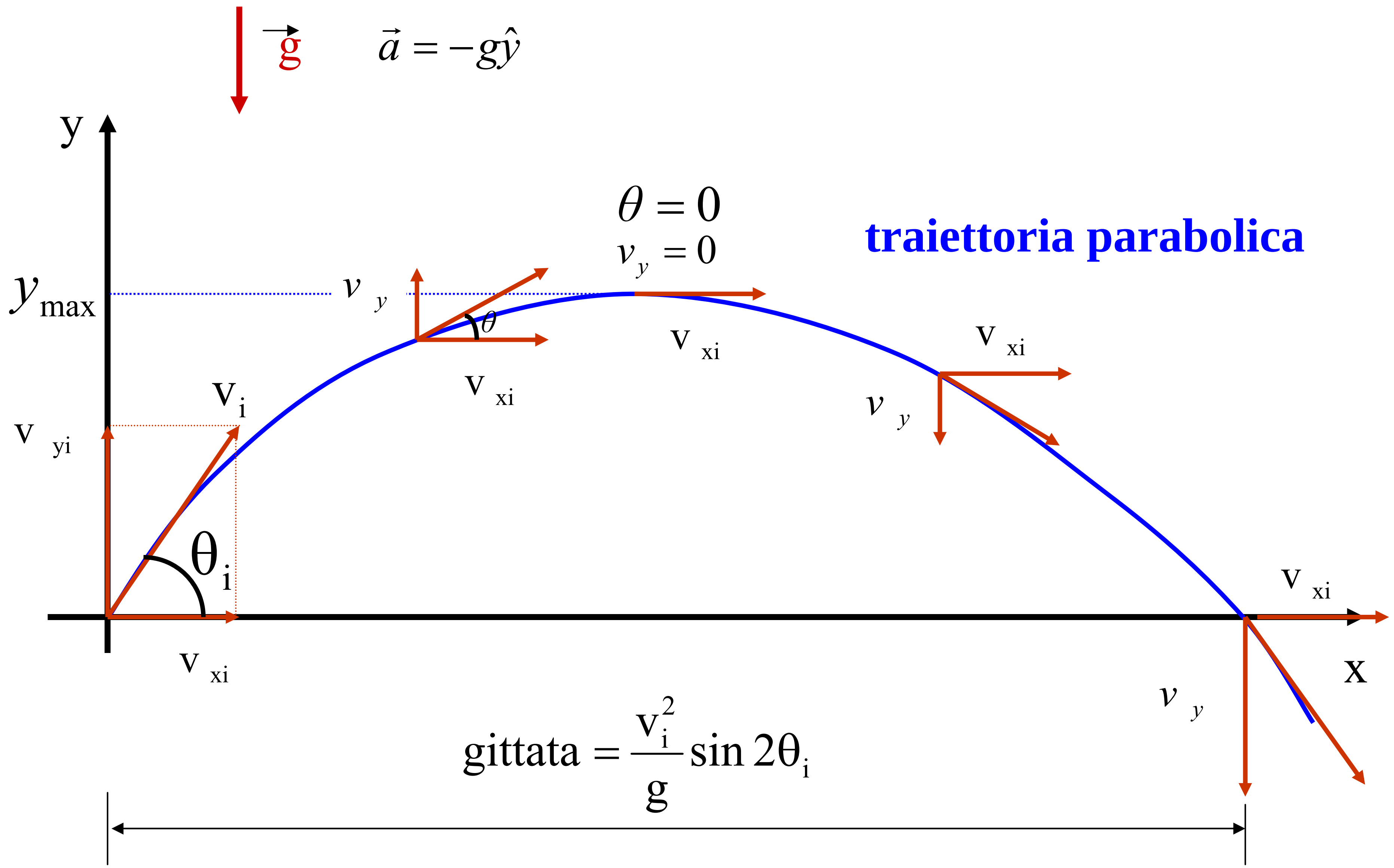






$t = \text{ -- } s$

$v_x = \text{ -- } m/s \qquad v_y = \text{ -- } m/s$



$\vec{g}$
$\vec{a} = -g\hat{y}$
y
$\theta = 0$
$v_y = 0$
traiettoria parabolica
y_{max}
v_y
θ
v_{xi}
v_i
v_{yi}
θ_i
x
gittata $= \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta_i$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ v_{yf} = v_i \sin\theta_i - gt \\ y_f = y_i + v_i t \sin\theta_i - gt^2/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{xf} = v_i \cos\theta_i \\ x_f = x_i + v_i t \cos\theta_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \\ y_i &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad y_f = v_i t \sin\theta_i - gt^2/2$$

$$\boxed{y = 0} \quad \Longrightarrow \quad t_g = 2v_i \sin\theta_i / g$$

Gittata $= \; v_x t_g = 2 v_i \cos\theta_i v_i \sin\theta_i / g = \dfrac{v_i^2}{g} \sin 2\theta_i$

$$2\cos\theta_i \sin\theta_i = \sin 2\theta_i$$

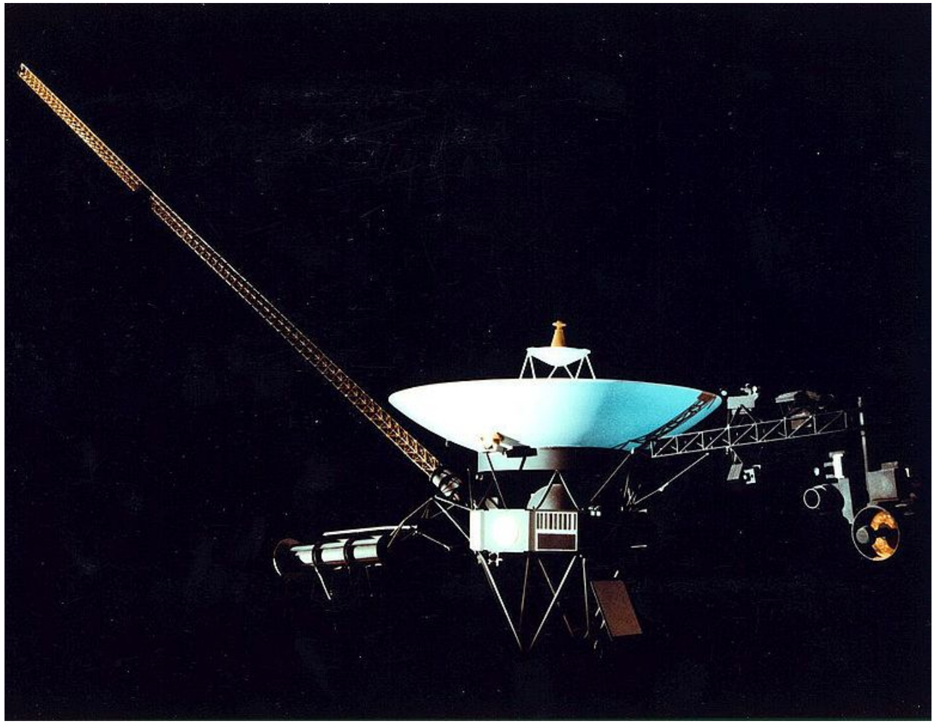
Gittata max per $\theta_i = 45°$

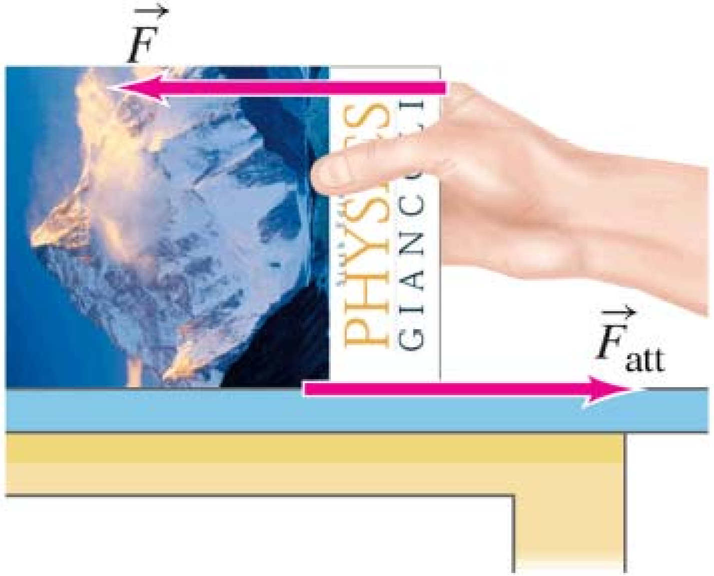
DINAMICA

$$\text{I tre principi di Newton}\begin{cases}\text{primo:} & \text{principio di inerzia}\\ \text{secondo:} & \vec{F} = m\vec{a}\\ \text{terzo:} & \text{principio di azione e reazione}\end{cases}$$

Principio di inerzia

Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché forze esterne ad esso non intervengono a modificarne lo stato





Principio di inerzia

Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché forze esterne ad esso non intervengono a modificarne lo stato

Sistemi inerziali

Sistema di riferimento inerziale: un sistema in cui è valida la prima legge di Newton

Qualunque sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento inerziale è un sistema inerziale

Un sistema fisso o in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle "fisse" è un sistema di riferimento inerziale

La Terra ruota intorno al proprio asse e intorno al Sole, perciò un sistema fisso rispetto alla Terra non è un sistema inerziale

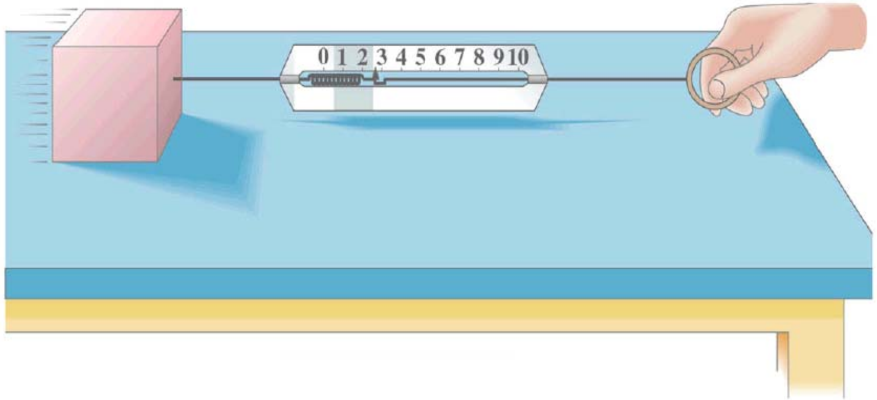
$$a_{\text{c-riv.}} = 4.4 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

$$a_{\text{c-rot.}} = 3.37 \times 10^{-2}\ m/s^2$$

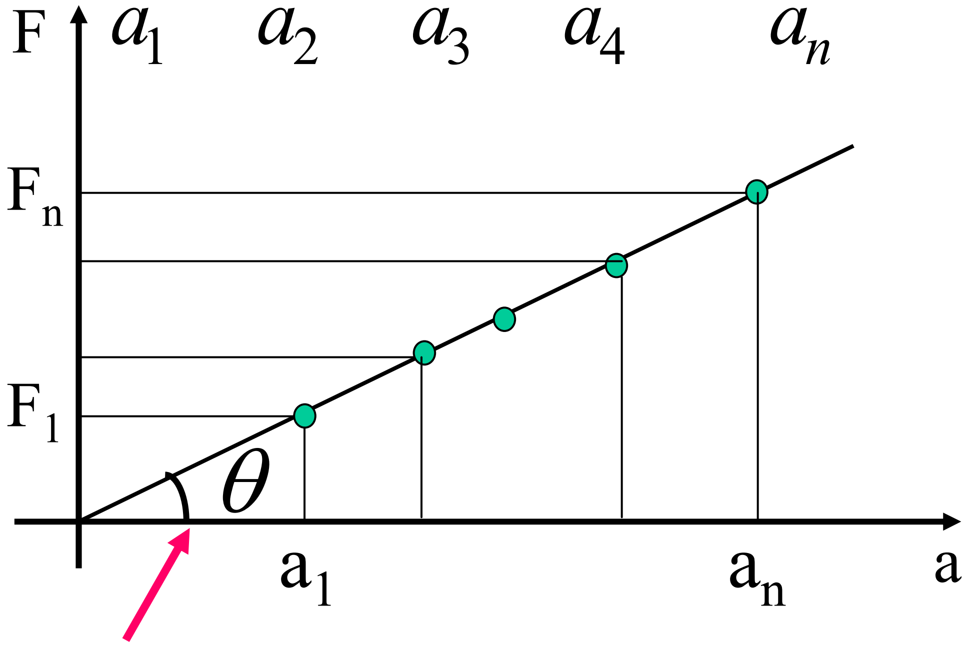
tuttavia

In molte situazioni sarà lecito trascurare queste piccole accelerazioni e considerare inerziale un sistema solidale con la Terra

Seconda legge della dinamica



$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \frac{F_4}{a_4} = \ldots \frac{F_n}{a_n} = m$$



F_1	F_2	F_3	F_4	…	F_n
a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n

$$tg\theta \equiv m \Rightarrow \text{massa del corpo}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$$F = ma \Rightarrow kg\,\frac{m}{s^2}$$

$$1\,N \equiv newton$$

La forza di 1 N imprime un’accelerazione di 1 m/s² ad una massa di 1 kg

Esempio

Stimare la forza necessaria per imprimere un'accelerazione di 5 m/s^2 ad un'automobile di 1000 kg e ad una mela di 200 g.

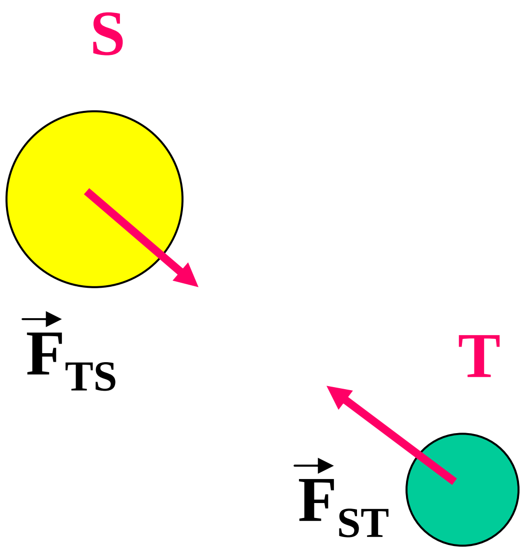
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

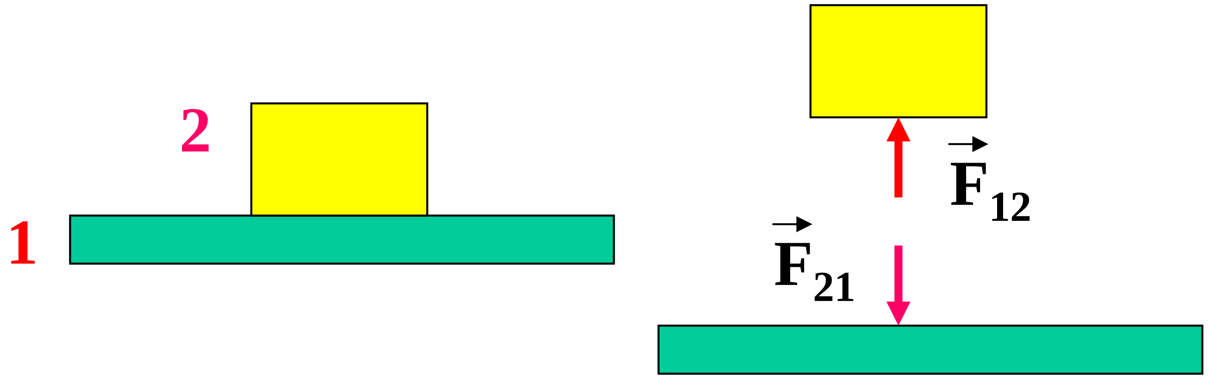
$$F_{auto} = 1000 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s}^2 = 5000 \text{ N}$$

$$F_{mela} = 0.2 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ N}$$

Terza legge della dinamica

principio di azione e reazione





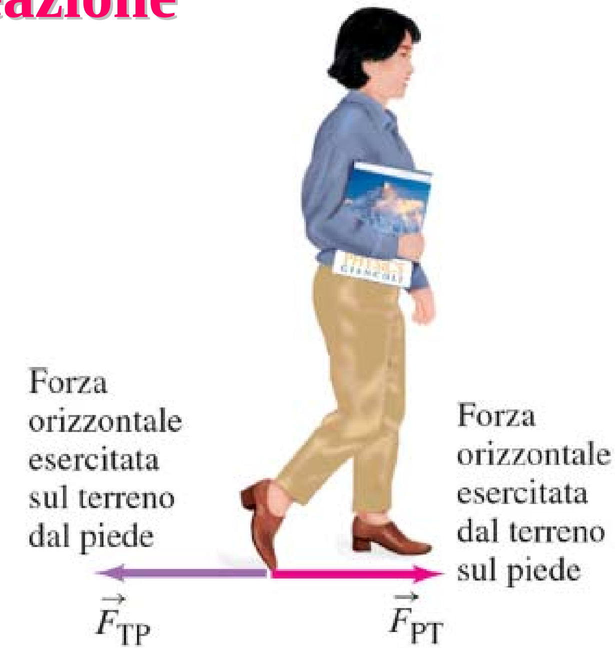
$$\vec{F}_{ST} = -\vec{F}_{TS}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Agiscono su corpi diversi

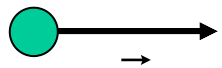
Hanno ugual modulo e direzione,
e verso opposto

Terza legge della dinamica
principio di azione e reazione



Quantità di moto

m



$\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Quantità di moto
o
Momento (lineare)

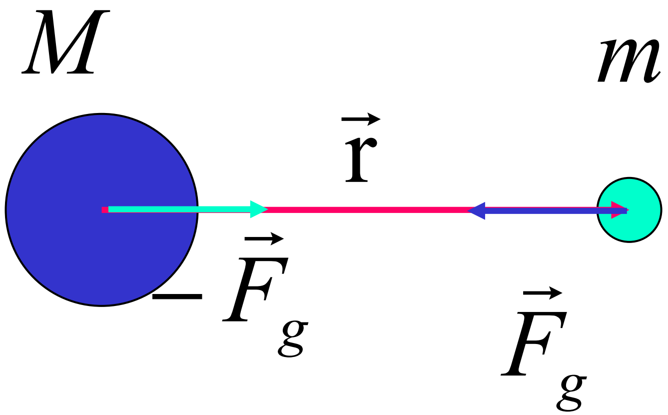
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$se \quad \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Conservazione della quantità di moto

$$\vec{p} = \mathrm{cost} \Rightarrow = \begin{cases} \mathrm{p_x} = \mathrm{cost1} \\ \mathrm{p_y} = \mathrm{cost2} \\ \mathrm{p_z} = \mathrm{cost3} \end{cases}$$

Gravitazione universale

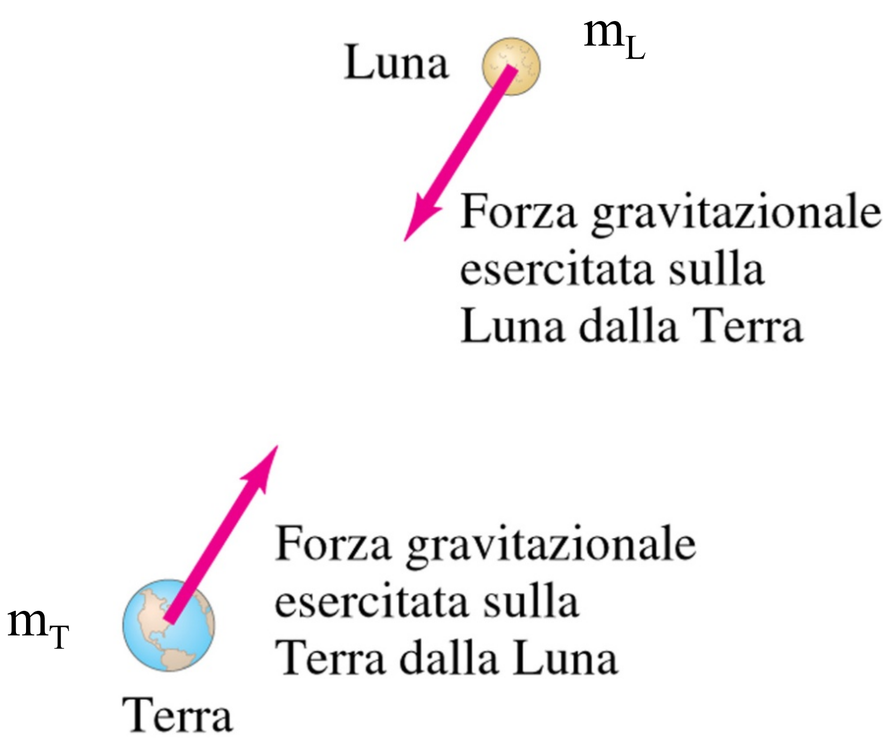


$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Costante di gravitazione universale

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}}$$

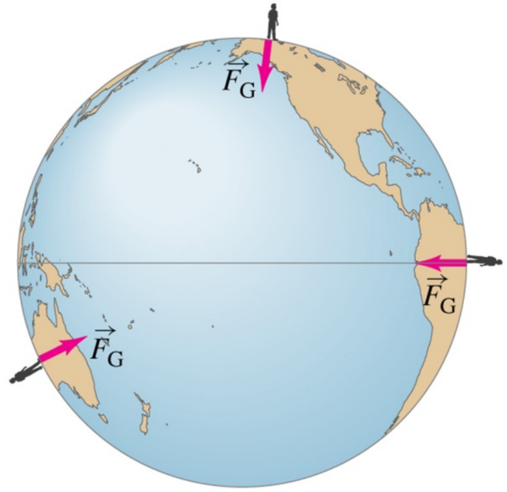
Esempio


Luna
m_L
Forza gravitazionale esercitata sulla Luna dalla Terra
m_T
Terra
Forza gravitazionale esercitata sulla Terra dalla Luna

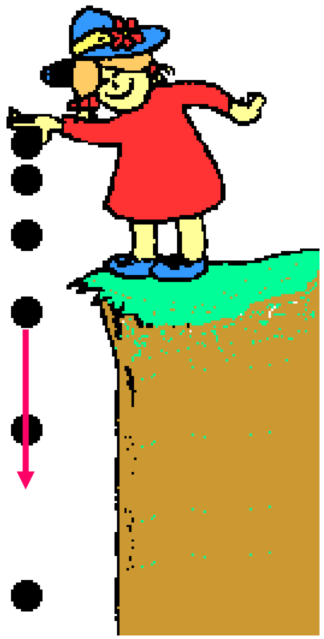
Forza gravitazionale e peso

Il peso

forza con la quale un corpo viene attirato verso il centro della Terra



$\vec{P}$

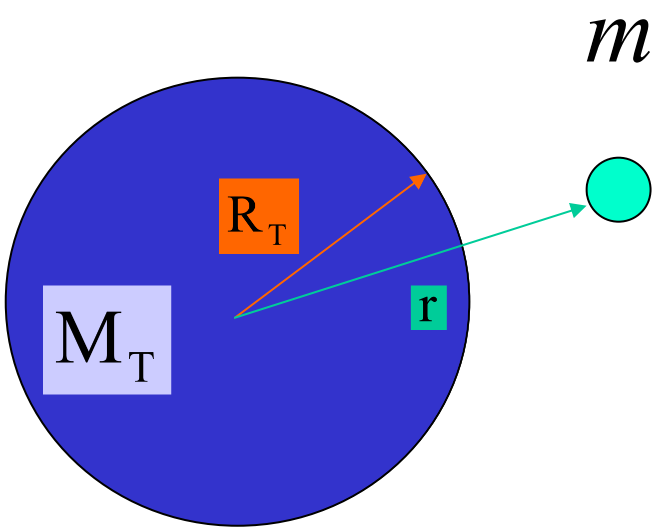


$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \equiv \vec{P}$$

Qual è il peso di 1 Kg_m?

$$P = mg = 1Kg_m \times 9.8\frac{m}{s^2} = 9.8N \equiv 1Kg_{peso}$$

PESO



$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

$$F_T = G\frac{M_T m}{R_T^2} = ma = mg_T$$

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Vicino alla superficie

$$r \cong R_T$$

$M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg

$R_T = 6.371 \times 10^{6}$ m

Il peso cambia da punto a punto sulla Terra

per $m = 70\ Kg \begin{cases} g = 9.80\ \dfrac{m}{s^2} & \text{al livello del mare} & P = 686\ N \\ g = 9.786\ \dfrac{m}{s^2} & \text{in cima All'Everest} & P = 685\ N \end{cases}$

Sulla Luna

$\Downarrow$

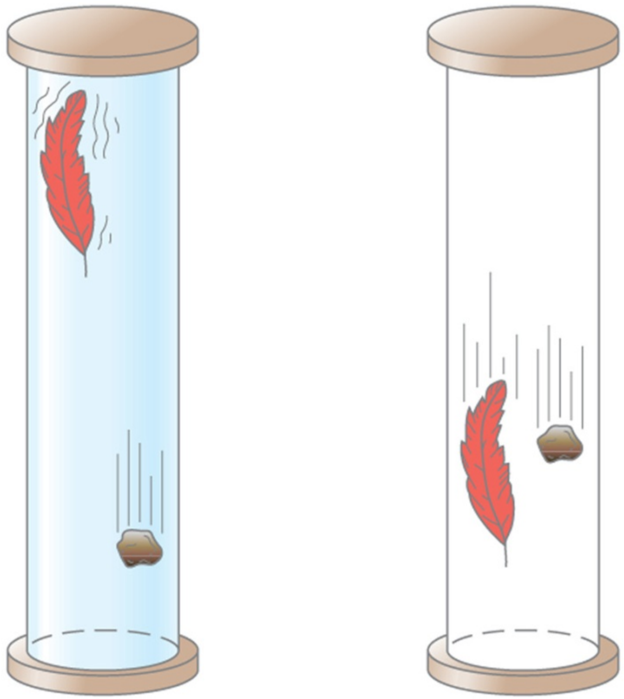
$P = 113\ N$

$$F_L = G\frac{M_L m}{R_L^2}$$

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2}$$

$M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg

$R_L = 1.737 \times 10^{6}$ m



Tubo pieno d'aria Tubo «vuoto»