Fisica per Farmacia A.A. 2018/2019

Responsabile del corso: Prof. Alessandro Lascialfari

Tutor (16 ore): Matteo Avolio

Lezione del 15/05/2019 – 2 h (13:30-15:30, Aula G10, Golgi)

ESERCITAZIONI – TERMODINAMICA

Esercizio 1

La miscela benzina-aria nel cilindro di un motore diesel alla temperatura iniziale di 20 °C viene compressa da una pressione iniziale di 1 atm e volume iniziale di 800 cm^3 ad un volume finale di 60 cm^3. Assumendo che la miscela si comporti come un gas perfetto con $\gamma = C_P / C_V = 1.4$ e che la compressione sia adiabatica, trovare la pressione finale e la temperatura finale della miscela.

SOLUZIONE

$T_A = 20°C = 293\ K$
$V_A = 800\ cm^3 = 8.00 \cdot 10^{-4}\ m^3$
$p_A = 1\ atm = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$

$V_B = 60\ cm^3 = 6.0 \cdot 10^{-5}\ m^3$

$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.4$

$p_B = ?$ $\qquad$ $T_B = ?$

Per una trasformazione adiabatica, si applicano le equazioni di Poisson, per cui:

$$pV^\gamma = cost$$
$$TV^{\gamma-1} = cost$$

Dunque:

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = (1.013 \cdot 10^5\ Pa)\left(\frac{8.00 \cdot 10^{-4}\ m^3}{6.0 \cdot 10^{-5}\ m^3}\right)^{1.4} = 3.806 \cdot 10^6\ Pa \ \approx\ 37.6\ atm$$

Ma anche:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = (293\ K)\left(\frac{8.00 \cdot 10^{-4}\ m^3}{6.0 \cdot 10^{-5}\ m^3}\right)^{1.4-1} = (293\ K)\left(\frac{8.00 \cdot 10^{-4}\ m^3}{6.0 \cdot 10^{-5}\ m^3}\right)^{0.4} = 826\ K = 553°C$$

Esercizio 2

Una mole di un gas ideale monoatomico ha inizialmente una temperatura di 27 °C. Esso viene riscaldato in maniera isocora fino ad una temperatura di 327 °C, poi viene sottoposto ad una espansione isoterma fino alla sua pressione iniziale e infine viene compresso in maniera isobara fino allo stato iniziale. Tutte le trasformazioni sono reversibili. Calcolare il rendimento del ciclo.

SOLUZIONE

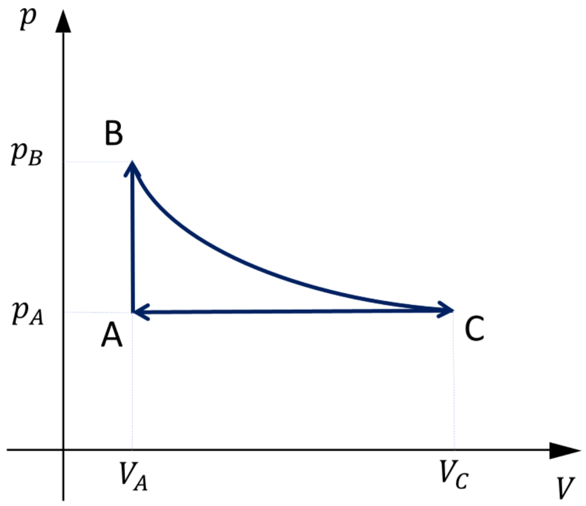
$n = 1\,mol$
$c_V = \frac{3}{2}R \qquad\qquad c_p = \frac{5}{2}R$
$R = 8.315\ \frac{J}{mol \cdot K}$

$T_A = 27°C = 300\ K$
$T_B = 327°C = 600\ K$
$V_A = V_B$

$T_C = T_B$
$p_C = p_A$

$\eta = ?$

Rappresentiamo le trasformazioni nel piano p(V):



Analizziamo il tratto AB, una trasformazione isocora:

$V = cost \qquad \rightarrow \qquad L_{AB} = 0\ J$

$$Q_{AB} = nc_V\Delta T = nc_V(T_B - T_A) = 1\ mol \cdot \frac{3}{2}R \cdot (600\ K - 300\ K) = 3742\ J$$

Analizziamo il tratto BC, una trasformazione isoterma:

$$T = cost \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_{int_{BC}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_{BC} = -L_{BC} = -\left(-nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B}\right)$$

Per determinare V_C applichiamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_C V_C = nRT_C \qquad \rightarrow \qquad V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{nRT_C}{p_A}$$

Per determinare p_A applichiamo ancora l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_A V_A = nRT_A \qquad \rightarrow \qquad p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \frac{nRT_A}{V_B} = p_C$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione di V_C:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_A} = \frac{nRT_C}{\frac{nRT_A}{V_B}} = V_B \frac{T_C}{T_A} = V_B \frac{T_B}{T_A}$$

Dunque:

$$Q_{BC} = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B} = nRT_B \ln\frac{V_B \frac{T_B}{T_A}}{V_B} = nRT_B \ln\frac{T_B}{T_A} = 1\, mol \cdot 8.315\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 600\ K \cdot \ln\frac{600}{300} = 3458\, J$$

Infine, analizziamo la trasformazione CA, isobara:

$$Q_{CA} = nc_p\Delta T = nc_p(T_A - T_C) = 1\, mol \cdot \frac{5}{2} R \cdot (300\ K - 600\ K) = -6236\, J$$

Calcoliamo quindi il calore complessivo assorbito, Q_{ass}, e quello ceduto, Q_{ced}, durante l'intero ciclo:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3742\, J + 3458\, J = 7200\, J$$

$$Q_{ced} = Q_{AC} = -6236\, J$$

E il rendimento del ciclo:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 - \frac{6236}{7200} = 0.134$$

Esercizio 3

Una macchina di Carnot è costituita da un gas perfetto che compie un ciclo tra le due temperature T_a = 127 °C e T_b con $T_b < T_a$. Il gas, in un ciclo completo, compie un lavoro di 3000 J e cede una quantità di calore Q = 9000 J al termostato a temperatura più bassa. Calcolare la temperatura del termostato a temperatura minore T_b.

SOLUZIONE

La macchina di Carnot è una macchina termica che lavora tra un serbatoio caldo, a temperatura:

$$T_c = T_a = 127°C = 400\ K$$

E un serbatoio freddo, a temperatura:

$$T_f = T_b < T_a = T_c$$

In ogni ciclo sappiamo che:

$$L = 3000\, J$$
$$Q_f = 9000\, J$$

Scriviamo la definizione generale di rendimento di una macchina termica:

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = \frac{|Q_C| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|}$$

Dove Q_c è il calore prelevato dal serbatoio caldo e Q_f il calore ceduto al serbatoio freddo. Dall'uguaglianza:

$$L = |Q_C| - |Q_f|$$

Ricaviamo:

$$|Q_C| = L + |Q_f| = 3000\, J + 9000\, J = 12000\, J$$

Dunque il rendimento vale:

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = \frac{3000\, J}{12000\, J} = 0.25$$

Nel solo caso di una macchina di Carnot che compie un ciclo reversibile il rendimento può essere scritto in funzione della temperatura dei due serbatoi, quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_b}{T_a}$$

Da cui:

$$T_b = T_a(1-\eta) = 400\ K \cdot (1 - 0.25) = 300\ K = 27°C$$

Esercizio 4

Una macchina di Carnot è costituita da 2 moli di un gas perfetto che compiono un ciclo tra le temperature T_a = 227 °C e T_b = 127 °C. Alla temperatura più alta il gas assorbe una quantità di calore Q = 13000 J. Calcolare: a) Il rendimento e il lavoro compiuto dal gas in un ciclo; b) il rapporto tra il volume finale e quello iniziale nell'isoterma alla temperatura maggiore.

SOLUZIONE

$n = 2\ mol$

$T_A = 227°C = 500\ K$

$T_B = 127°C = 400\ K$

$Q_{ass} = 13000\ J$

a) $\eta = ?$ $L = ?$

b) $V_C/V_A = ?$ $T = T_A = cost$

a) Calcoliamo il rendimento della macchina di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{400\ K}{500\ K} = 0.2$$

Dalla definizione generale di rendimento $\eta = \frac{L}{|Q_{ass}|}$, troviamo quindi il lavoro svolto in un ciclo:

$$L = \eta|Q_{ass}| = 0.2 \cdot 13000\ J = 2600\ J$$

b) In una trasformazione isoterma $T = cost$, dunque $\Delta E_{int} = 0 \Rightarrow L = -Q_{ass} = -13000\ J$

Inoltre:

$$L = -nRT_A \ln\frac{V_C}{V_A}$$

$$\frac{-L}{nRT_A} = \ln\frac{V_C}{V_A}$$

$$\frac{V_C}{V_A} = \exp\left(-\frac{L}{nRT_A}\right) = \exp\left(-\frac{-13000\ J}{2\ mol \cdot 8.315\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 500\ K}\right) = e^{1.563} = 4.78$$

Esercizio 5

Se venisse fatta una macchina termica ideale di Carnot che utilizzasse come sorgente fredda il ghiaccio al punto di fusione T_1 = 0 °C (con calore latente di fusione $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg) e come sorgente calda l'oceano alla sua temperatura media T_2 = 4 °C, quale sarebbe la quantità di ghiaccio che si scioglierebbe in un'ora per produrre una potenza di P_0 = 1 GW?

SOLUZIONE

$T_1 = 0°C = 273\ K$ serbatoio freddo
$T_2 = 4°C = 277\ K$ serbatoio caldo
$\lambda = 3.3 \cdot 10^5\ J/kg$ calore latente di fusione
$P_0 = 1\ GW = 10^9\ W$ in un'ora

Calcoliamo subito il rendimento della macchina di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273\ K}{277\ K} = 0.014$$

E il lavoro svolto in un'ora (1 h = 3600 s):

$$L = P_0 \cdot \Delta t = 10^9\ W \cdot 3600\ s = 3.6 \cdot 10^{12}\ J$$

Poiché $\eta = \frac{L}{|Q_{ass}|}$, troviamo il calore assorbito dall'oceano dalla macchina di Carnot:

$$|Q_{ass}| = \frac{L}{\eta} = \frac{3.6 \cdot 10^{12}\ J}{0.014} = 2.6 \cdot 10^{14}\ J$$

Inoltre, $L = |Q_{ass}| - |Q_{ced}|$, quindi troviamo il calore ceduto al ghiaccio dalla macchina di Carnot:

$$|Q_{ced}| = |Q_{ass}| - L = 2.6 \cdot 10^{14}\ J - 3.6 \cdot 10^{12}\ J = 2.5 \cdot 10^{14}\ J$$

Per calcolare la massa di ghiaccio che si scioglie in un'ora, applichiamo la legge per le trasformazioni di fase:

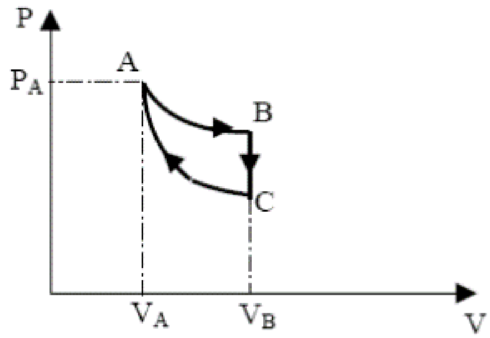
$$|Q_{ced}| = \lambda\, m$$

$$m = \frac{|Q_{ced}|}{\lambda} = \frac{2.5 \cdot 10^{14}\ J}{3.3 \cdot 10^5\ J/kg} = 7.6 \cdot 10^8\ kg$$

Esercizio 6

Un gas perfetto monoatomico (γ=1,67; $C_P = \frac{5}{2}R$; $C_V = \frac{3}{2}R$) esegue il ciclo reversibile mostrato in figura. La trasformazione AB è isoterma, la BC isocora e la CA adiabatica.
Il gas si trova inizialmente ad una temperatura T_A= 300 K, pressione P_A= 300 kPa e volume V_A =2 m^3; l'espansione isoterma AB porta il gas ad un volume V_B=8 m^3.
Determinare:

a) La pressione e la temperatura nel punto C.
b) Il rendimento del ciclo.



[Si ricordi che per un'adiabatica $TV^{\gamma-1}$=cost e PV^{γ} = cost. Per un'isocora Q = $nC_V(T_C-T_B)$]

SOLUZIONE

$c_V = \frac{3}{2}R$ $c_p = \frac{5}{2}R$ $R = 8.31\ \frac{J}{mol \cdot K}$ $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1.67$

$p_A = 300000\ Pa = \ 3 \cdot 10^5\ Pa$
$T_A = 300\ K$
$V_A = 2\ m^3$

$T_B = T_A = 300\ K$
$V_B = 8\ m^3$

$V_C = V_B$

$p_C = ?$ $T_C = ?$ $\eta = ?$

Consideriamo la trasformazione isoterma AB. Innanzitutto, calcoliamo il numero di moli del gas, applicando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$p_A V_A = nRT_A \quad \rightarrow \quad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{(3\cdot 10^5\ Pa)(2\ m^3)}{(8.31\ \frac{J}{mol\cdot K})(300\ K)} = 240.7\ mol$

Per una trasformazione isoterma:

$T = cost \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{int_{AB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = -L_{AB} = -\left(-nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A}\right)$

$$Q_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = 240.7\ mol \cdot 8.31\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 300\ K \cdot \ln\frac{8\ m^3}{2\ m^3} = 8.32 \cdot 10^5\ J$$

Essendo positivo, Q_{AB} è calore assorbito. Inoltre:

$$L_{AB} = -Q_{AB} = -8.32 \cdot 10^5\ J$$

Consideriamo la trasformazione BC, isocora.

$V = cost \quad \rightarrow \quad L_{BC} = 0\ J$

$Q_{BC} = nc_V \Delta T = nc_V (T_C - T_B)$

Ci occorre quindi conoscere T_C per calcolare Q_{BC}.
Per determinare T_C consideriamo la trasformazione CA, adiabatica, per la quale vale l'equazione di Poisson:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = (300\ K)\left(\frac{2\ m^3}{8\ m^3}\right)^{1.67-1} = (300\ K)\left(\frac{2\ m^3}{8\ m^3}\right)^{0.67} = 118.5\ K$$

Similmente, troviamo la pressione nel punto C:

$$p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma}$$

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = (3 \cdot 10^5\ Pa)\left(\frac{2\ m^3}{8\ m^3}\right)^{1.67} = 2.96 \cdot 10^4\ Pa$$

Calcoliamo quindi Q_{BC}:

$$Q_{BC} = nc_V \Delta T = nc_V (T_C - T_B) = 240.7\ mol \cdot \frac{3}{2} R \cdot (118.5\ K - 300\ K) = -5.45 \cdot 10^5\ J$$

Essendo negativo, Q_{BC} è calore ceduto.

Infine, essendo CA una trasformazione adiabatica, $Q_{CA} = 0\,J$.
Complessivamente, il calore assorbito nel ciclo vale:

$$Q_{ass} = Q_{AB}$$

Mentre quello ceduto vale

$$Q_{ced} = Q_{BC}$$

Quindi il rendimento del ciclo è:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{|Q_{AB}|} = 1 - \frac{5.45 \cdot 10^5\,J}{8.32 \cdot 10^5\,J} = 0.345$$

Cioè il 34.5%.

Esercizio 7

Una mole di un gas perfetto monoatomico passa dallo stato iniziale A di coordinate termodinamiche : $p_A = 2$ atmosfere, $V_A = 10$ litri allo stato finale D , attraverso le seguenti trasformazioni: AB , isobara con $V_B = 20$ litri; BC, isoterma con $V_C = 40$ litri ; CD, isovolumica con $p_D = 0.5$ atmosfere.

a) Si disegnino le tre trasformazioni AB, BC, CD in un diagramma (V, p) e si calcoli la quantità di calore totale scambiata nel passaggio del gas dallo stato iniziale A allo stato finale D attraverso le tre trasformazioni date. Si precisi se la quantità di calore è assorbita o ceduta .

b) Si calcoli la variazione di energia interna del gas nel passaggio dallo stato iniziale A allo stato finale D.

(R= 8.31 J/Kmole =0.082 l atm /K mol)

SOLUZIONE

$n = 1\,mol$

$c_V = \frac{3}{2}R$ $\quad\quad$ $c_p = \frac{5}{2}R$ $\quad\quad$ $R = 8.31\,\frac{J}{mol \cdot K} = 0.082\,\frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$

$p_A = 2\,atm = 2.026 \cdot 10^5\,Pa$ $\quad\quad$ $V_A = 10\,L = 10^{-2}\,m^3$

$p_B = p_A = 2.026 \cdot 10^5\,Pa$ $\quad\quad$ $V_B = 20\,L = 2 \cdot 10^{-2}\,m^3$

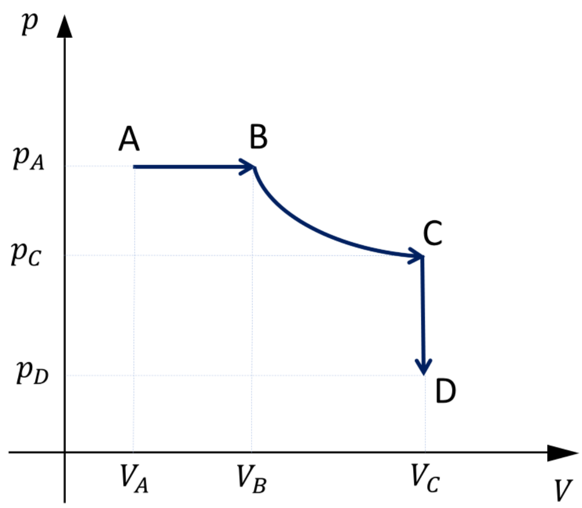
$T_C = T_B$ $\quad\quad$ $V_C = 40\,L = 4 \cdot 10^{-2}\,m^3$

$p_D = 0.5\,atm = 5.066 \cdot 10^4\,Pa$ $\quad\quad$ $V_D = V_C = 4 \cdot 10^{-2}\,m^3$

a) $\quad Q_{AD} = ?$ $\quad\quad Q_{AB} = ?$ $\quad\quad Q_{BC} = ?$ $\quad\quad Q_{CD} = ?$

b) $\quad \Delta E_{int_{AD}} = ?$

a) Rappresentiamo graficamente le trasformazioni nel piano p(V):



Consideriamo la trasformazione AB, isobara:

$$Q_{AB} = nc_p\Delta T = nc_p(T_B - T_A)$$

Determiniamo T_A e T_B usando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$p_A V_A = nRT_A \qquad \rightarrow \qquad T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(2\ atm)(10\ L)}{(1\ mol)(0.082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K})} = 243.9\ K$

$p_B V_B = nRT_B \qquad \rightarrow \qquad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(2\ atm)(20\ L)}{(1\ mol)(0.082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K})} = 487.8\ K$

Quindi:

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 1\ mol \cdot \frac{5}{2} R \cdot (487.8\ K - 243.9\ K) = 1\ mol \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.31 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot (243.9\ K) = 5065\ J$$

Poiché $Q_{AB} > 0$, è calore assorbito. Inoltre per una trasformazione isobara:

$$L_{AB} = -p_A \Delta V = -p_A(V_B - V_A) = -(2.026 \cdot 10^5\ Pa)(2 \cdot 10^{-2}\ m^3 - 10^{-2}\ m^3) = -2025\ J$$

Consideriamo ora la trasformazione isoterma BC:

$T = cost \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_{int_{BC}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_{BC} = -L_{BC} = -\left(-nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}\right)$

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = 1\ mol \cdot 8.31\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 487.8\ K \cdot \ln \frac{40}{20} = 2810\ J$$

Essendo $Q_{BC} > 0$, è calore assorbito. Inoltre:

$$L_{BC} = -Q_{BC} = -2810\ J$$

Consideriamo infine la trasformazione CD, isocora:

$V = cost \qquad \rightarrow \qquad L_{CD} = 0\ J$

$$Q_{CD} = nc_V \Delta T = nc_V(T_D - T_C)$$

Dove $T_C = T_B = 487.8\ K$, mentre T_D può essere ricavato dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$p_D V_D = nRT_D \qquad \rightarrow \qquad T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{p_D V_C}{nR} = \frac{(0.5\ atm)(40\ L)}{(1\ mol)(0.082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K})} = 243.9\ K$

Notiamo che $T_D = T_A$. Calcoliamo quindi:

$$Q_{CD} = nc_V(T_D - T_C) = 1\ mol \cdot \frac{3}{2} R \cdot (243.9\ K - 487.8\ K) = 1\ mol \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot (-243.9\ K) = -3040\ J$$

Essendo $Q_{CD} < 0$, è calore ceduto.
Calcoliamo quindi il calore totale scambiato nella trasformazione AD:

$$Q_{AD} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = 5065\ J + 2810\ J - 3040\ J = 4835\ J$$

b) Poiché abbiamo osservato che $T_D = T_A$, la temperatura non cambia tra lo stato iniziale e quello finale dunque si può subito concludere che

$$\Delta E_{int_{AD}} = 0\ J$$

Volendo, i dati calcolati in precedenza confermano questa conclusione:

$$\Delta E_{int_{AD}} = Q_{AD} + L_{AD} = Q_{AD} + L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} = 4835\ J - 2025\ J - 2810\ J + 0\ J = 0\ J$$