Calcolo combinatorio

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **calcolo combinatorio** D il termine che denota tradizionalmente la branca della matematica che studia i modi per raggruppare e/o ordinare secondo date regole gli elementi di un insieme finito di oggetti. Il calcolo combinatorio si interessa soprattutto di contare tali modi, ovvero le **configurazioni** e solitamente risponde a domande quali "Quanti sono...", "In quanti modi...", "Quante possibili combinazioni..." eccetera.

PiG formalmente, dato un insieme S di n oggetti si vuole contare le configurazioni che possono assumere k oggetti tratti da questo insieme. Prima di affrontare un problema combinatorio bisogna precisare due punti importanti:

- Se l'*ordinamento* D importante, ovvero se due configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento ($\{x,y,z\}$ D uguale a $\{z,x,y\}$?)
- Se si possono avere piG *ripetizioni* di uno stesso oggetto, ovvero se uno stesso oggetto dell'insieme pue o meno essere riusato piG volte all'interno di una stessa configurazione.

Indice

Permutazioni

*Per approfondire, vedi le voci **Permutazione** e **Fattoriale**.*

Permutazioni semplici (senza ripetizioni)

Una permutazione di un insieme di oggetti D una presentazione ordinata, cioD una sequenza, dei suoi elementi nella quale ogni oggetto viene presentato una ed una sola volta. Per contare quante siano le permutazioni di un insieme con n oggetti, si osservi che il primo elemento della configurazione pue essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$, il terzo in $(n-2)$ e cosE via sino all'ultimo che potrc essere preso in un solo modo essendo l'ultimo rimasto. Dunque, indicando con P_n il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi, si ottiene che esse sono esattamente $n!$ (n fattoriale):

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Ad esempio le permutazioni degli elementi dell'insieme { *a, b, c*} sono 3! = 6: *abc*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, *acb*. Un altro esempio pue essere il seguente: In quanti modi possibili possiamo anagrammare la parola "MONTE", contando anche le parole prive di significato: MONTE n=5; P5 = 5 ? 4 ? 3 ? 2 ? 1 = 120 modi di anagrammare la parola ATRIO. N.B: nella parola ATRIO nessuna lettera si ripete.

Per completare meglio la definizione di fattoriale fissiamo anche i valori seguenti:

1! = 1 e 0! = 1.

Permutazioni con ripetizioni

In alcuni casi un insieme pue contenere elementi che si ripetono. In questo caso alcune permutazioni di tali elementi saranno uguali tra loro. Indicando con k_1, k_2 fino a k_r il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi *1*, *2* fino a *r*, dove *r* i *n*, le permutazioni uniche (non ripetute) divengono:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

Si tratta, infatti, di dividere il numero delle distinte permutazioni di *n* oggetti per il numero delle permutazioni di k_1! presenze di uno stesso elemento, tutte uguali tra loro, poi per il numero delle permutazioni di k_2! presenze di uno stesso elemento, ecc.

La formula vale in realtc per qualsiasi permutazione, anche senza ripetizioni di elementi. Infatti, se assumiamo k_1, k_2 fino a k_r uguali ad 1 (cioD gli elementi si ripetono una sola volta), otteniamo esattamente la formula delle permutazioni semplici, perchc si ha:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!} = \frac{n!}{1!\cdots 1!} = n!$$

Ad esempio: In quanti modi possiamo anagrammare la parola FARFALLA.

Le lettere contenute nella parola sono n=8; gli elementi che si ripetono sono (Fo (k_1=2) ; (Ao (k_2=3); (Lo (k_3=2)

Utilizzando la formula, avremo:

$$P_8^{k_1,k_2,k_3} = \frac{8!}{2!3!2!} = \frac{40320}{24} = 1680$$

Dismutazioni

Sono dette dismutazioni le permutazioni prive di punti fissi, con formula:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} \sim \frac{n!}{e}$$

Disposizioni

Per approfondire, vedi la voce ***Disposizione***.

Disposizioni semplici (senza ripetizioni)

Una **disposizione semplice** di lunghezza k di elementi di un insieme S di n oggetti, con k i n, D una presentazione ordinata di k elementi di S nella quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso oggetto. Per avere il numero di queste configurazioni si considera che il primo componente di una tale sequenza pue essere scelto in n modi diversi, il secondo in (n-1) e cosE via sino al k-esimo che pue essere scelto in (n-k+1) modi diversi. Pertanto il numero $D_{n,k}$ di disposizioni semplici di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti D dato da

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad esempio le disposizioni semplici di lunghezza 2 degli elementi dell'insieme {1,2,3,4,5} sono 5!/(5 -2)! = 5!/3! = 120/6 = 20: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Si osserva che le permutazioni sono casi particolari delle disposizioni semplici: le permutazioni di un insieme di n oggetti sono le disposizioni semplici di tali oggetti di lunghezza n. In effetti per il loro numero:

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Disposizioni con ripetizioni

Una presentazione ordinata di elementi di un insieme nella quale si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento si dice **disposizione con ripetizioni** . Cerchiamo il numero delle possibili sequenze di k oggetti estratti dagli elementi di un insieme di n oggetti, ognuno dei quali pue essere preso piG volte. Si hanno n possibilitc per scegliere il primo componente, n per il secondo, altrettante per il terzo e cosE via, sino al k-esimo che completa la configurazione. Il numero cercato D pertanto:

$$D'_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

Ad esempio le disposizioni con ripetizione di lunghezza 2 degli elementi di {1,2,3,4,5} sono $5^2 = 25$: Si osserva che pue anche essere $k > n$

Combinazioni

Per approfondire, vedi la voce ***Combinazione***.

Combinazioni semplici (senza ripetizioni)

Si chiama **combinazione semplice** una presentazione di elementi di un insieme nella quale non ha importanza l'ordine dei componenti e non si pue ripetere lo stesso elemento piG volte. La collezione delle combinazioni di k elementi estratti da un insieme S di n oggetti distinti si pue considerare ottenuta dalla collezione delle disposizioni semplici di lunghezza k degli elementi di S ripartendo tali sequenze nelle classi delle sequenze che presentano lo stesso sottoinsieme di S e scegliendo una sola sequenza da ciascuna di queste classi. Ciascuna delle suddette classi di sequenza di lunghezza k contiene k! sequenze, in quanto accanto a una sequenza a si hanno tutte e sole quelle ottenibili permutando i componenti della a. Quindi il numero delle combinazioni semplici di n elementi di lunghezza k si ottiene dividendo per k! il numero delle disposizioni semplici di n elementi di lunghezza k:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Di solito tra le diverse disposizioni semplici di una classe si sceglie come combinazione rappresentativa la sequenza nella quale i componenti compaiono in ordine crescente (tutti gli insiemi finiti possono avere gli elementi ordinati totalmente, ovvero associati biunivocamente ai primi interi positivi).

Ad esempio le combinazioni semplici di lunghezza 4 degli elementi di {1,2,3,4,5,6} sono 6!/(4!2!) = 15: 1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456.

Combinazioni con ripetizioni

Quando l'ordine non D importante ma D possibile avere componenti ripetute si parla di **combinazioni con ripetizione** . Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k D uguale a quello delle combinazioni senza ripetizione di $n+k$-1 oggetti di classe k ed D quindi uguale a

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Ad esempio, vi sono $\binom{2+4-1}{4} = 5$ modi di distribuire a 2 bambini distinguibili 4 caramelle indistinguibili, contando anche i casi in cui uno dei bambini non riceve nessuna caramella: 0 -4, 1-3, 2-2, 3-1, 4-0. Equivalentemente, le combinazioni con ripetizioni informano sul numero di possibili n-ple di addendi non negativi la cui somma sia k (considerando diverse n-ple in cui eguali addendi compaiano in ordine differente); nel suddetto esempio, sono mostrate le cinque diverse duple di somma 4. Inoltre, le combinazioni con ripetizioni per n oggetti di classe k rappresentano il numero delle derivate parziali di ordine k calcolabili per una funzione a n variabili.

Voci correlate

- Combinatoria
- Permutazione
- Disposizione
- Combinazione
- Dismutazione (matematica)
- Binomio di Newton

Altri progetti

- **Commons (//commons.wikimedia.org/wiki/Pagina_principale?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **Calcolo combinatorio (//commons.wikimedia.org/wiki/Category:Combinatorics?uselang=it)**

Portale Matematica : accedi alle voci di Wikipedia che trattano di matematica

Categoria: Combinatoria

Differenziale esatto

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In calcolo infinitesimale, un **differenziale** δQ è detto **esatto** se e solo se è integrabile, cioè se la grandezza Q è esprimibile come funzione della seconda classe di continuità semplicemente connessa (di immagine sottoinsieme dei numeri reali): l'implicazione diretta discende dal fatto che la seconda ammette sempre un solo differenziale $\mathrm{d}\, Q$; per generalizzare la nozione di differenziale come infinitesimo a quantità Q definite arbitrariamente, risulta poi utile avere un criterio per determinare se Q sia esprimibile come *funzione* delle sue variabili, o se invece non lo sia, anche perché in quest'ultimo caso risulta non conservata su un integrale chiuso nelle sue variabili.

Criterio di Schwartz

In generale se $Q(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($Q(\mathbf{x})$ è quindi una funzione di n variabili) ammette un differenziale, esso corrisponde al prodotto scalare:

$$\mathrm{d}\, Q = \nabla Q \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{x} = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è applicata la definizione di prodotto scalare. Si nota il gradiente che permette appunto l'integrazione:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_i \int \frac{\partial Q}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i.$$

ma condizione necessaria e sufficiente affinché ciò sia possibile è che tutte le funzioni integrande dipendano da altre variabili con lo stesso andamento:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in (1, ..., n),$$

e cioè che $Q[\mathbf{x}]$ verifichi il teorema di Schwarz, affermazione valida per le funzioni $Q(\mathbf{x})$ della seconda classe di continuità. Poiché il differenziale di $Q[\mathbf{x}]$ viene solitamente costruito come dipendenza implicita dai differenziali delle variabili, e cioè nella forma:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_i \int A_i \,\mathrm{d}\, x_i,$$

il criterio si traduce nel testare se:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in (1, ..., n),$$

nel qual caso $Q[\mathbf{x}]$ ha differenziale esatto, che si può esprimere appunto $\mathrm{d}\, Q$. Per una funzione di una variabile ovviamente questo si riduce a verificare che $Q[x]$ appartenga alla prima classe di continuità, e cioè che A(x) sia funzione continua in x.

Applicazione termodinamica

Ad esempio, consideriamo la quantità di calore δQ scambiata in una trasformazione infinitesima:

$$\delta\, Q[T,V] = \mathrm{d}\,U + \mathrm{d}\,W = C_v\ \mathrm{d}\,T + p\,\mathrm{d}\,V$$

dove compaiono nell'ordine: la capacità termica a volume costante, la variazione di temperatura, la pressione e la variazione di volume. Vogliamo determinare se può essere definita funzioni di stato di un sistema termodinamico. L'equazione precedente traduce il primo principio della termodinamica per gas perfetti. È facile vedere che in generale

$$\frac{\partial C_v}{\partial V} = 0 \neq \frac{\partial p}{\partial T}$$

perciò Q non ha differenziale esatto, quindi il calore non è una funzione di stato del sistema.

Consideriamo ora invece l'aumento infinitesimo di entropia $\delta\, S$:

$$\delta\, S = \frac{\delta\, Q}{T} = \frac{C_v}{T}\ \mathrm{d}\,T + \frac{p}{T}\ \mathrm{d}\,V$$

e, poiché per i gas ideali vale $pV = RT$ si ha

$$\mathrm{d}\,S = \frac{C_v}{T}\ \mathrm{d}\,T + \frac{R}{V}\ \mathrm{d}\,V$$

Stavolta

$$\frac{\partial}{\partial V}\frac{C_v}{T} = 0 = \frac{\partial}{\partial T}\frac{R}{V}$$

quindi $\mathrm{d}\,S$ è *esatto* per i gas ideali e possiamo usare la notazione solita d. L'entropia è infine una funzione di stato:

$$S = \int \mathrm{d}\,S = \int \frac{C_v}{T}\ \mathrm{d}\,T + \int \frac{p}{T}\ \mathrm{d}\,V = C_v\ \ln T + R \ln V + \mathrm{cost.}$$

Voci correate

- Forma differenziale
- Funzione di più variabili
- Teorema di Schwarz
- Classe di continuità
- Derivata parziale
- Grandezza fisica
- Funzione di stato

Portale Matematica: accedi alle voci di Wikipedia che trattano di matematica