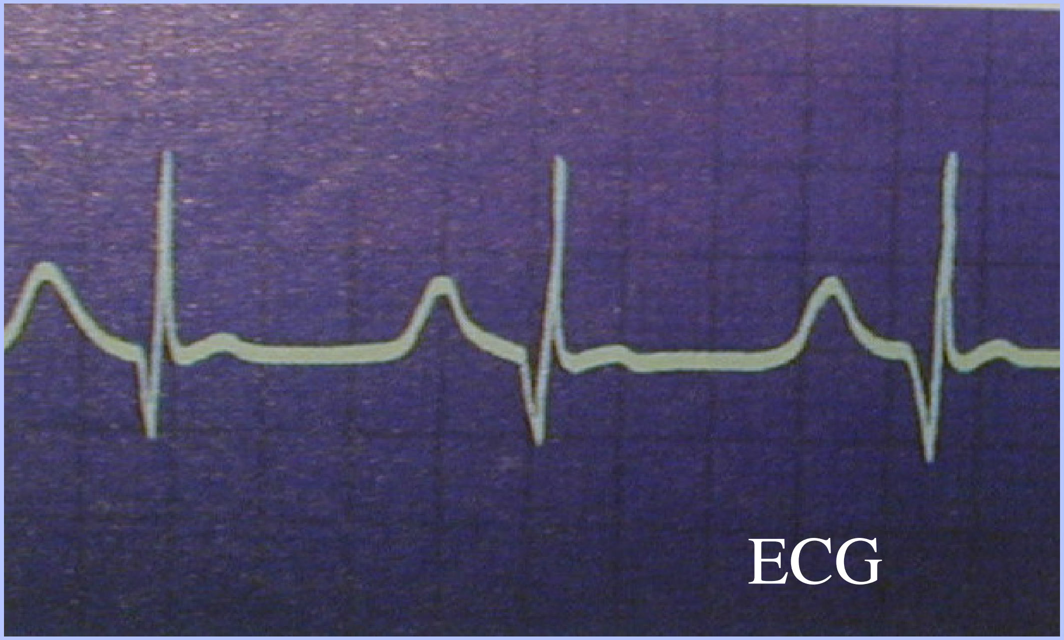
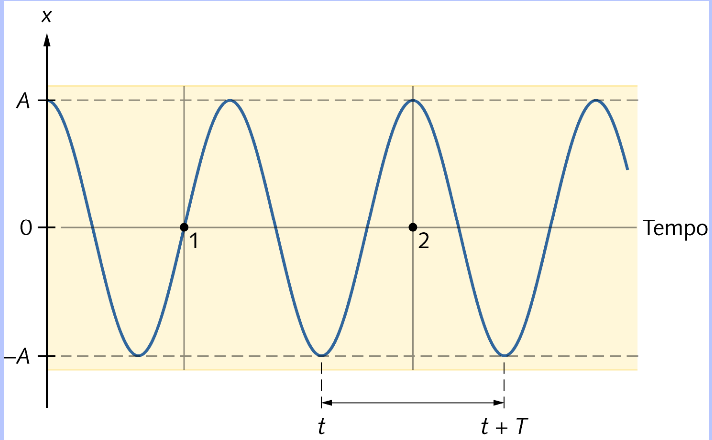
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Facoltà di Medicina e Chirurgia

Misure elettriche ed elettroniche

ANALISI ARMONICA

Oscillazioni e fenomeni periodici





Il periodo T
è il tempo necessario a compiere
un ciclo completo in un moto periodico

La frequenza f è il numero di oscillazioni complete
per unità di tempo.

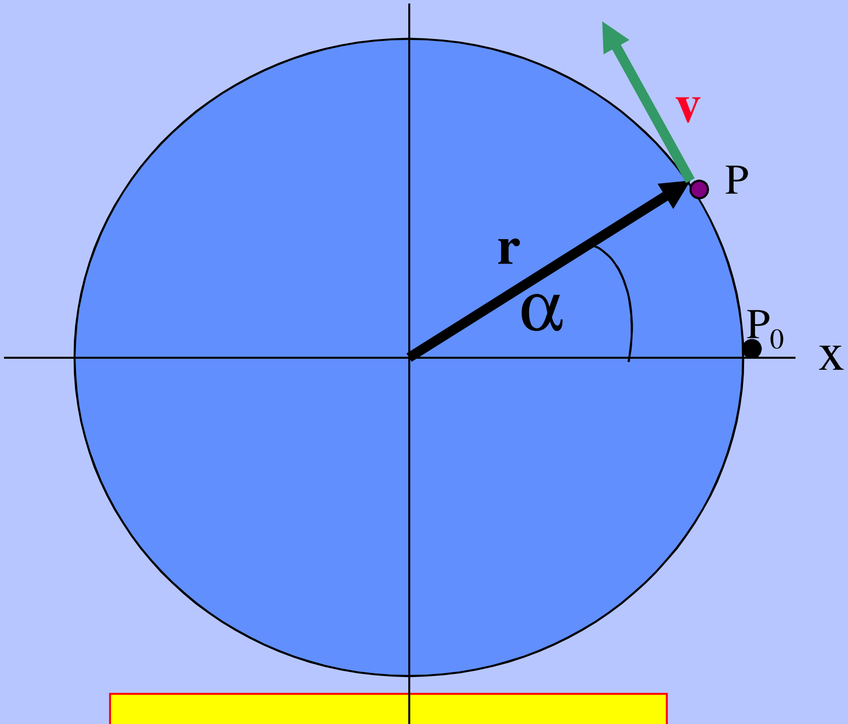
$$f = 1/T$$

$[f] = [T^{-1}]$ e si misura in Hz (hertz) = 1 ciclo/secondo

Moto circolare uniforme

Traiettoria circolare
con velocità scalare costante

legge oraria $s(t) = r\ \alpha(t)$



e poiché descrive archi uguali
in tempi uguali …

$$\Delta\alpha / \Delta t = \text{cost.}$$

la velocità angolare è costante:

$$\omega = \omega_m = \Delta\alpha / \Delta t$$

legge oraria $s(t) = r\ (\omega t)$

$$V = 2\pi r / T$$

$$\omega = 2\pi / T$$

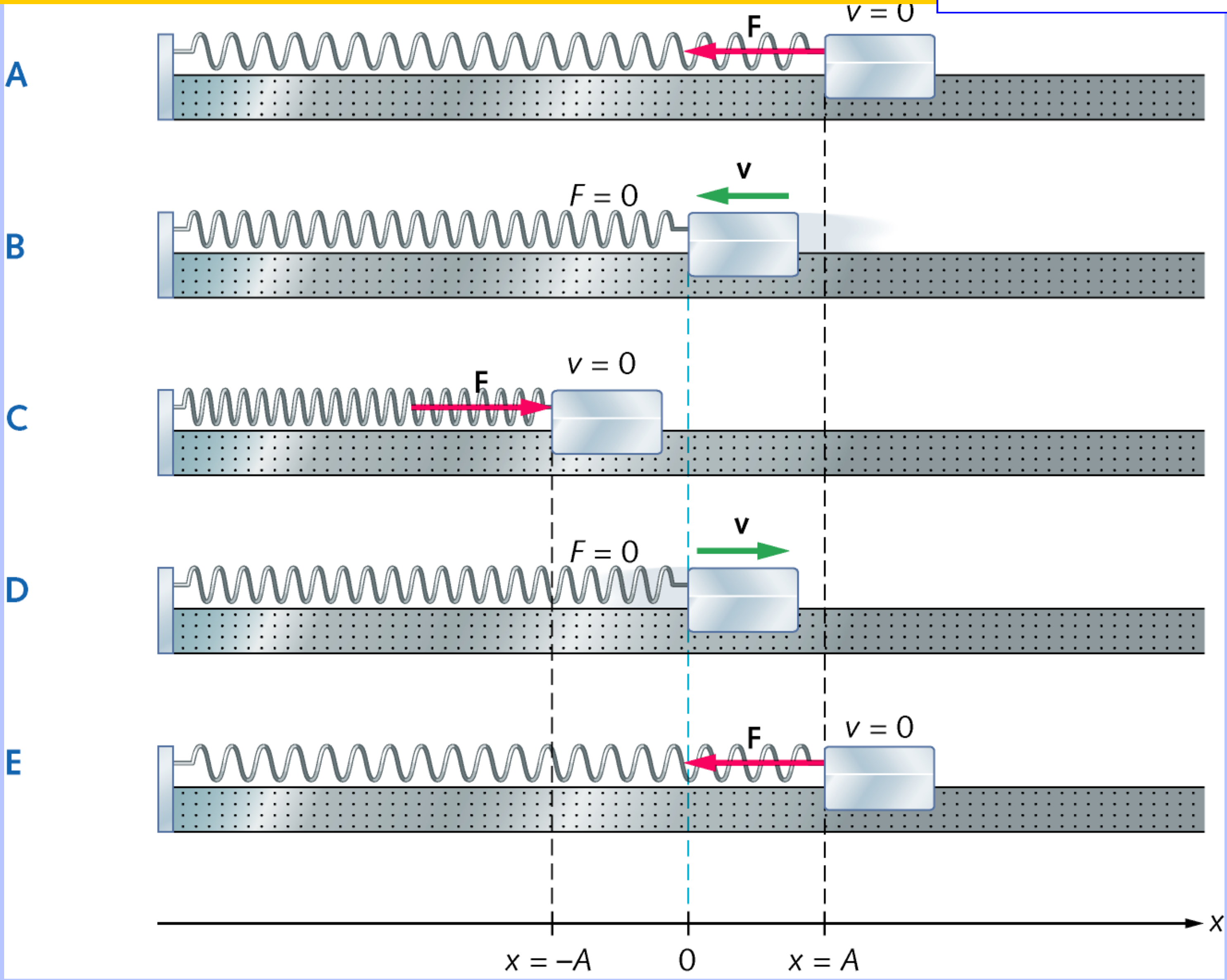
$$V = r\ \omega$$

Nel moto circolare uniforme
la velocità angolare media coincide con la velocità angolare istantanea

Moto armonico semplice

Una molla esercita sulla massa una forza di richiamo (legge di Hooke) la cui intensità è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio

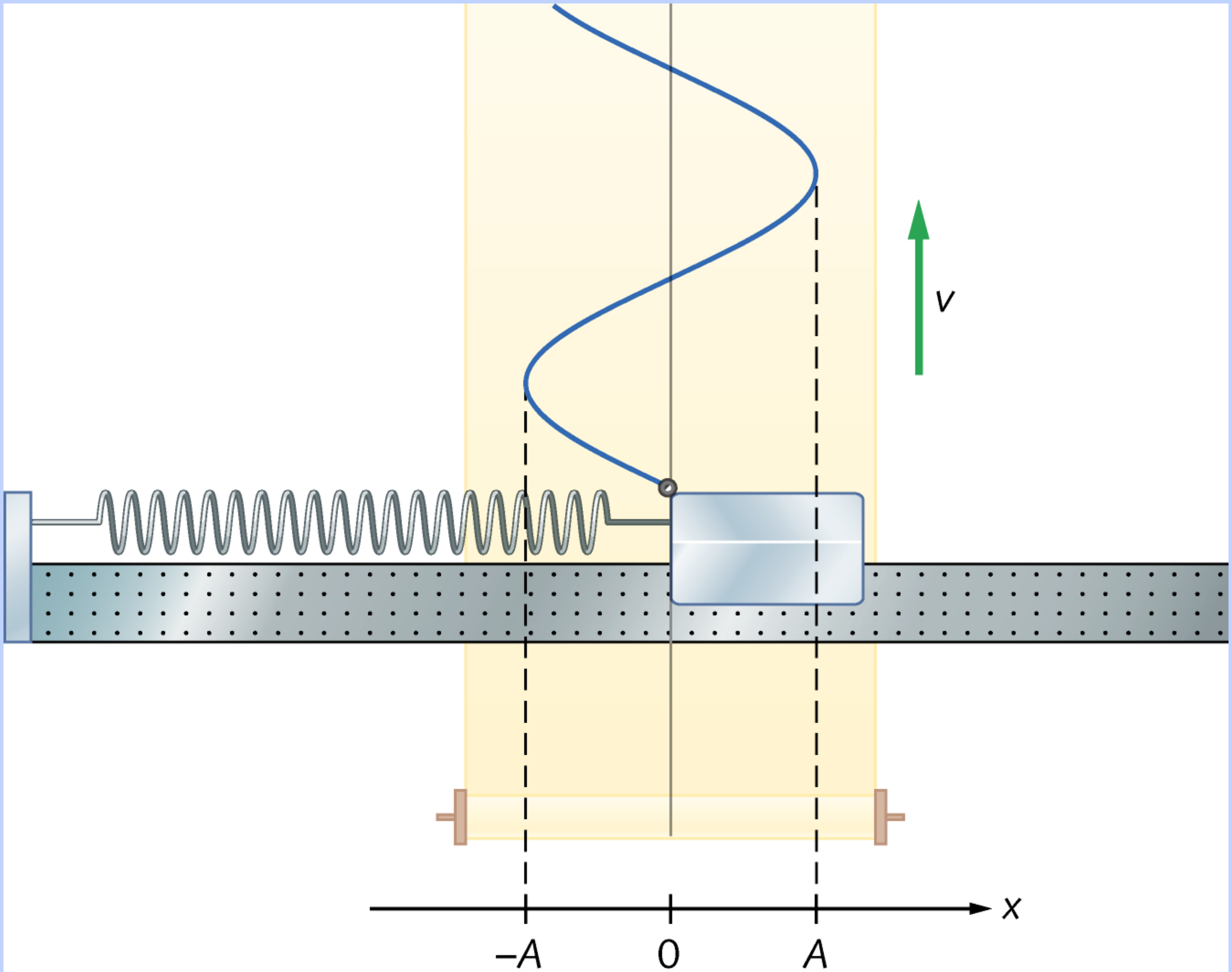
Oscillazioni elastiche



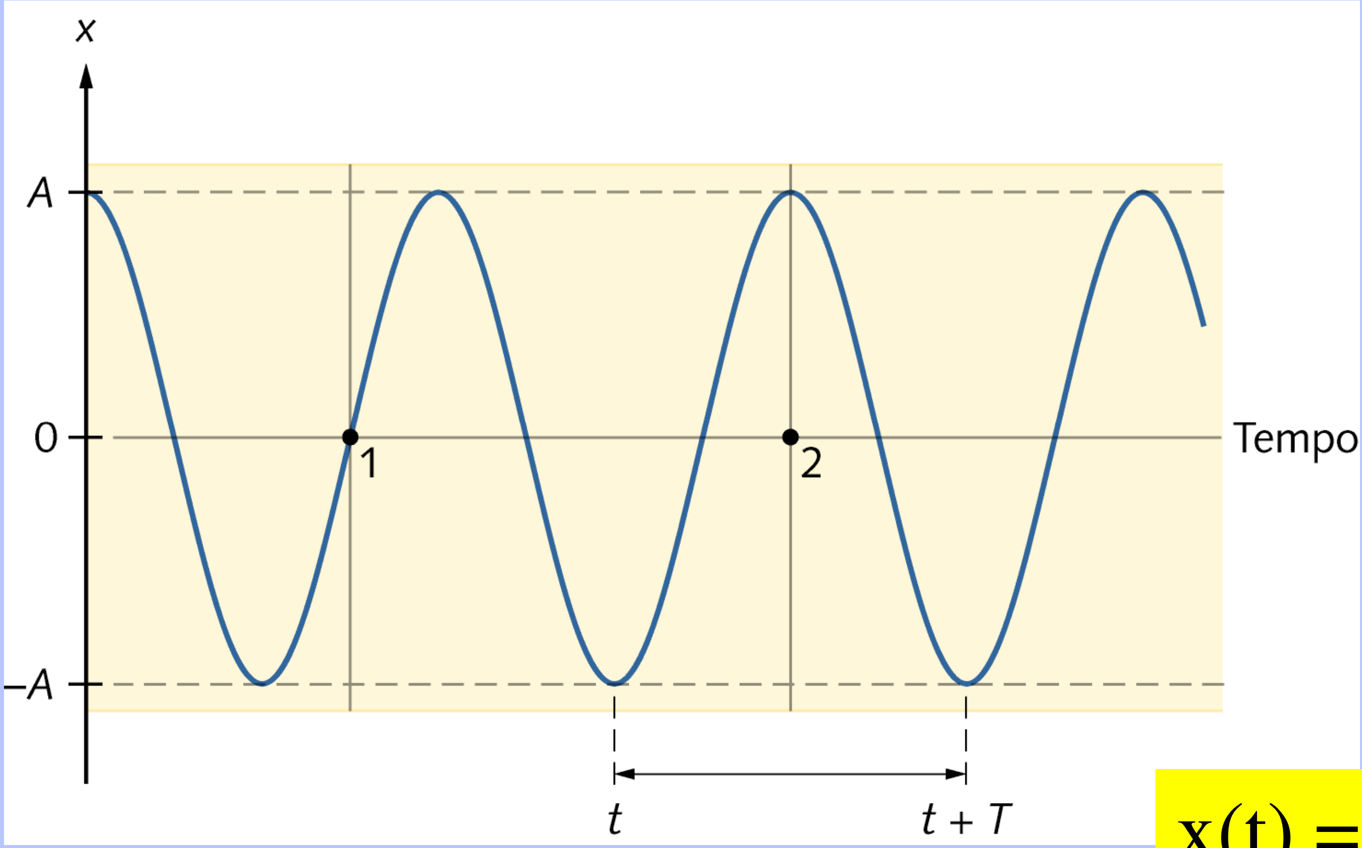
$$F = -kx$$

Moto armonico semplice

La massa continua a **oscillare …**



Moto armonico semplice



$x(t) = x(t + T)$

$$X = A \cos[\,(2\pi/T)\,t\,]$$

A = ampiezza di oscillazione
T = periodo della oscillazione

Confronto tra
Moto circolare uniforme e Moto armonico semplice

$\theta = \omega t$

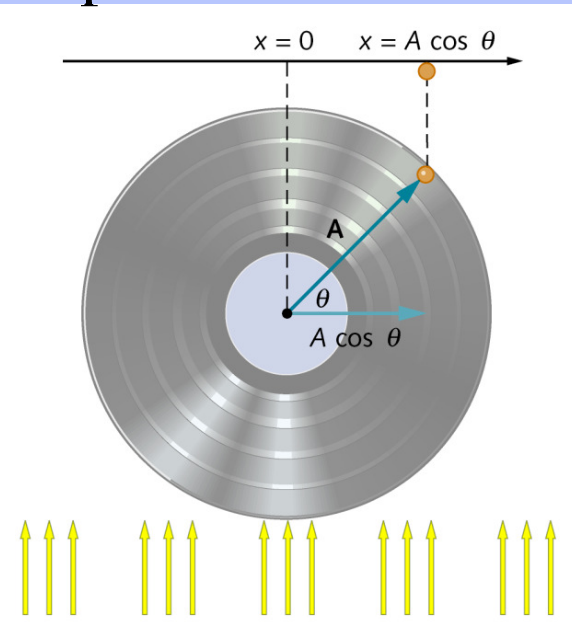
$s(t) = A\omega t$

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

detta pulsazione

$x(t) = A \cos[\ (\omega)\ t]$

$v = A\omega$



$v \ = - A\omega \sin\omega t$

$v_{max} \ = A\omega$

$a_{cp} = A\omega^2$

$a \ = - A\omega^2 \cos\omega t$

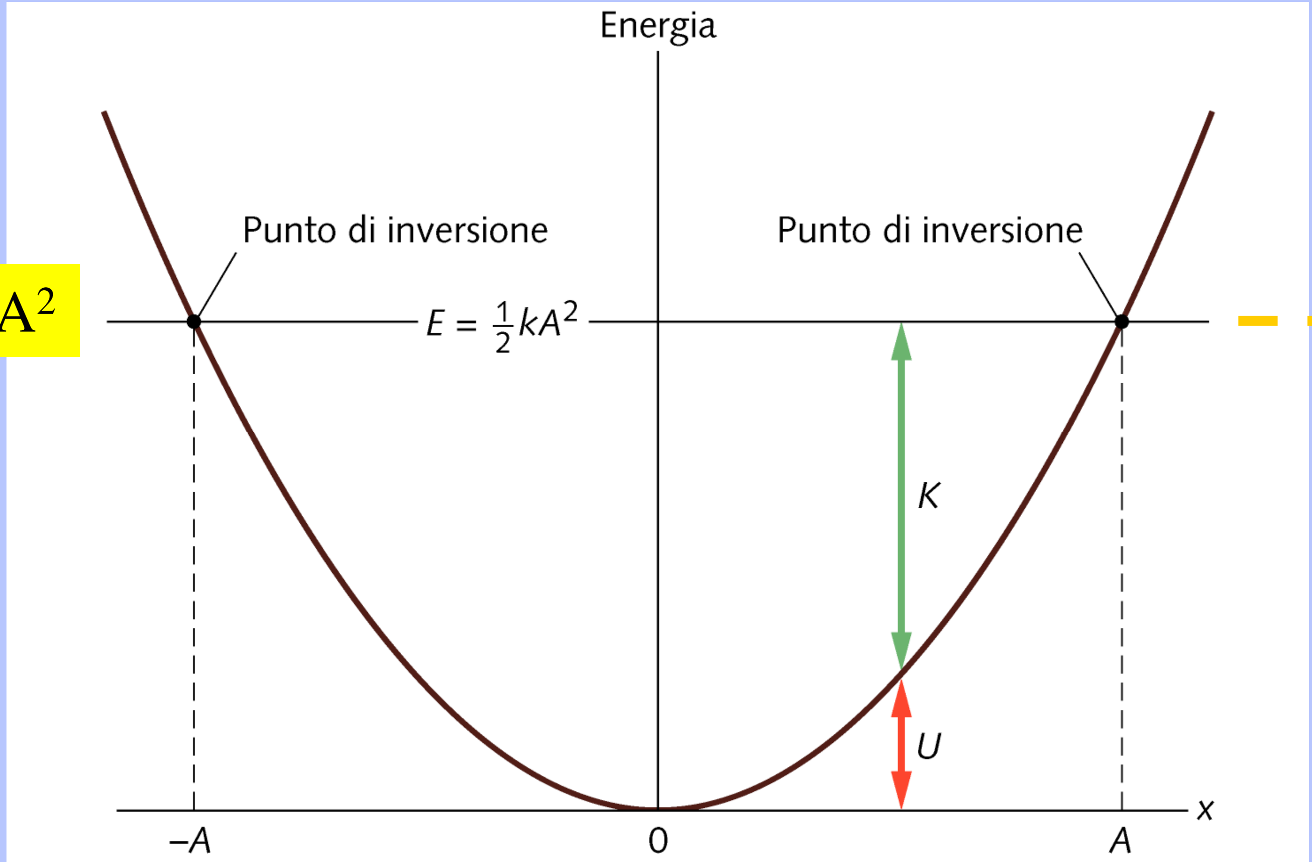
$$a \ = - \omega^2 x$$

Conservazione della energia nel moto oscillatorio:
anche la forza elastica è una forza conservativa…

e in un sistema ideale …

$$E_{totale} = K + U = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2$$

$E = U_{max} = \tfrac{1}{2} kA^2$



Nel moto armonico semplice l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza della oscillazione

1

ANALISI DI FOURIER

Sia f(t) una generica funzione *periodica*

⇒sono definibili un *periodo* $T = \frac{1}{\nu}$ e una *pulsazione* $\omega = 2\pi\nu$

- **Secondo il teorema di Fourier, si può scrivere:**

$$
\begin{aligned}
f(t) = f(t+T) = A_o &+ A_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + \\
&+ A_2 \operatorname{sen}(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \\
&+ A_3 \operatorname{sen}(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ A_i \operatorname{sen}(i\omega t) + B_i \cos(i\omega t) + \ldots\ldots =
\end{aligned}
$$

("sviluppo in serie di Fourier")

ANALISI DI FOURIER

2

$$f(t) = f(t+T) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n \,\mathrm{sen}(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t))$$

A_n , B_n = coefficienti numerici da determinare (positivi o negativi)

$n\omega$ = frequenza armonica n-esima

A_n , B_n = ampiezze n-esime

- lo sviluppo viene troncato quando la funzione periodica di partenza è riprodotta con sufficiente accuratezza

ANALISI DI FOURIER

3

calcolo dei coefficienti:

(eseguito tramite calcolatore)

$$A_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(i\omega t)\,dt$$

dove i = 1, 2, 3, ...

$$B_i = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\,(i\omega t)\,dt$$

dove i = 1, 2, 3, ...

ogni armonica richiede due coefficienti

ANALISI DI FOURIER

5

in alternativa si può anche scrivere:

$$f(t) = C_o + C_1 \,\text{sen}(\omega t + \phi_1) + C_2 \,\text{sen}(2\omega t + \phi_2) +$$

$$+ C_3 \,\text{sen}(3\omega t + \phi_3) + \dots + C_i \,\text{sen}(i\omega t + \phi_i) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \,\text{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

C_n , ϕ_n = **coefficienti da determinare (positivi o negativi)**

$n\omega$ = **frequenza armonica n-esima**

C_n = **ampiezza n-esima**

ϕ_n = **fase n-esima**

• Si dimostra che:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\text{tg}\, \phi_n = \frac{A_n}{B_n}$$

ANALISI DI FOURIER

6

Conseguenze:

- un fenomeno ondulatorio *qualsiasi* f(t) è dato dalla sovrapposizione di onde semplici come le funzioni seno e coseno:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \, \mathrm{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

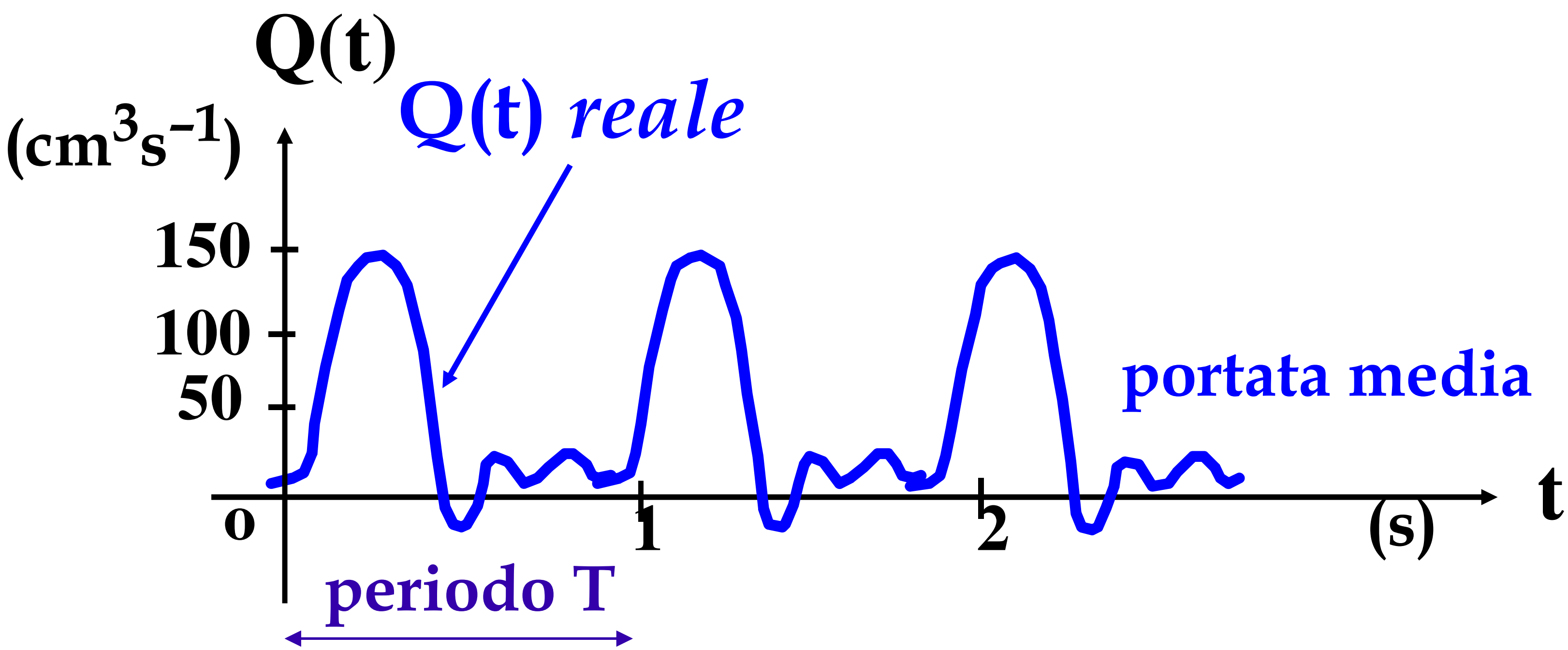
le caratteristiche dei fenomeni ondulatori semplici sono estese a fenomeni ondulatori complessi

esempio : $E_t \propto A^2$ $\quad$ $E_t \propto C_n^2$

idem per tutti i fenomeni da propagazione e da interferenza

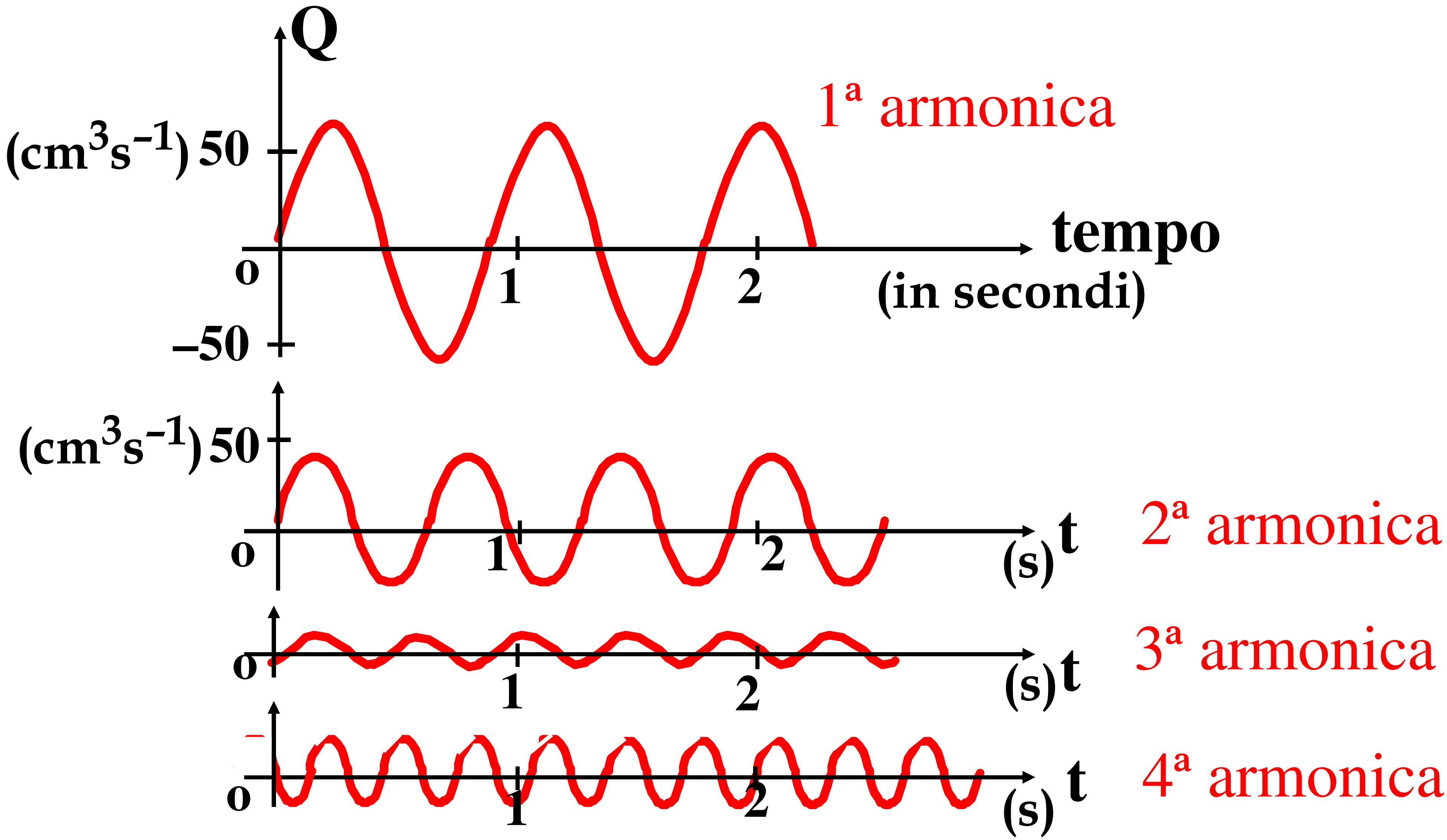
ANALISI DI FOURIER

Esempio 1: portata $Q = Q(t)$ del sangue in aorta



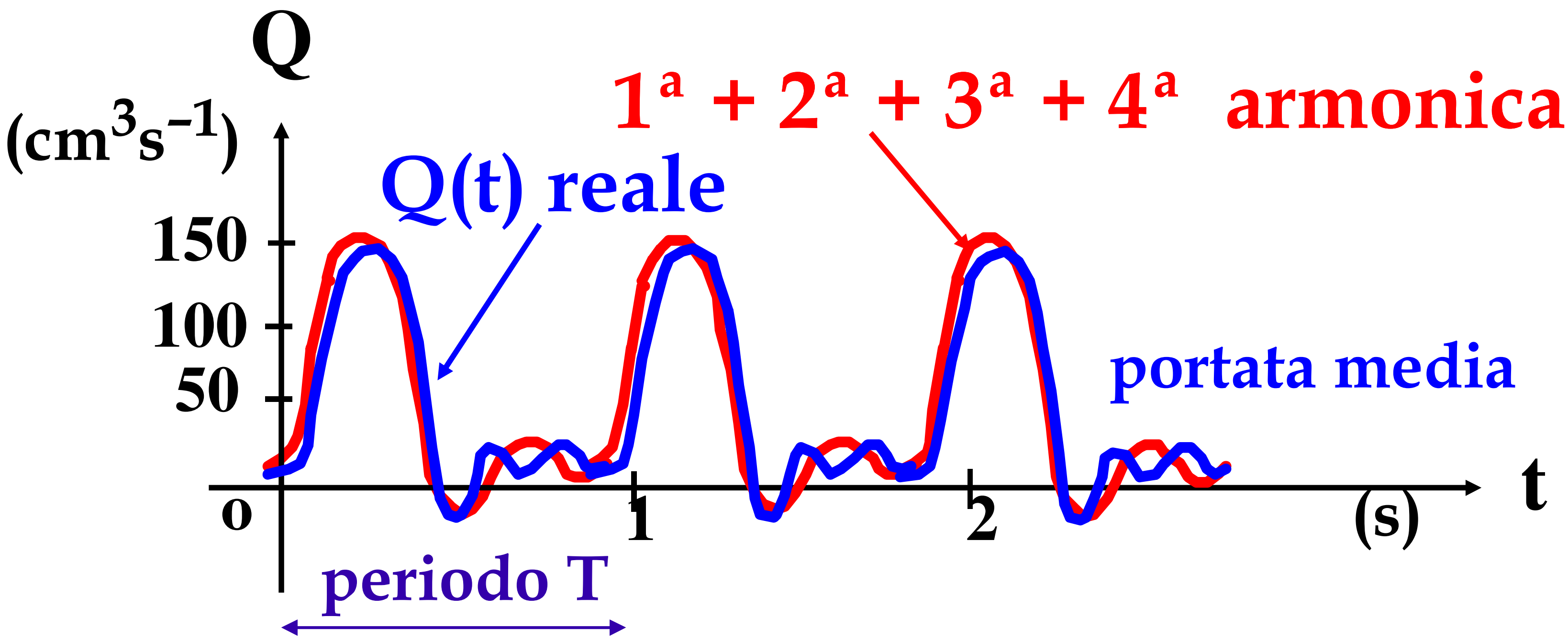
ANALISI DI FOURIER

Esempio 1: portata Q = Q(t) del sangue in aorta



ANALISI DI FOURIER

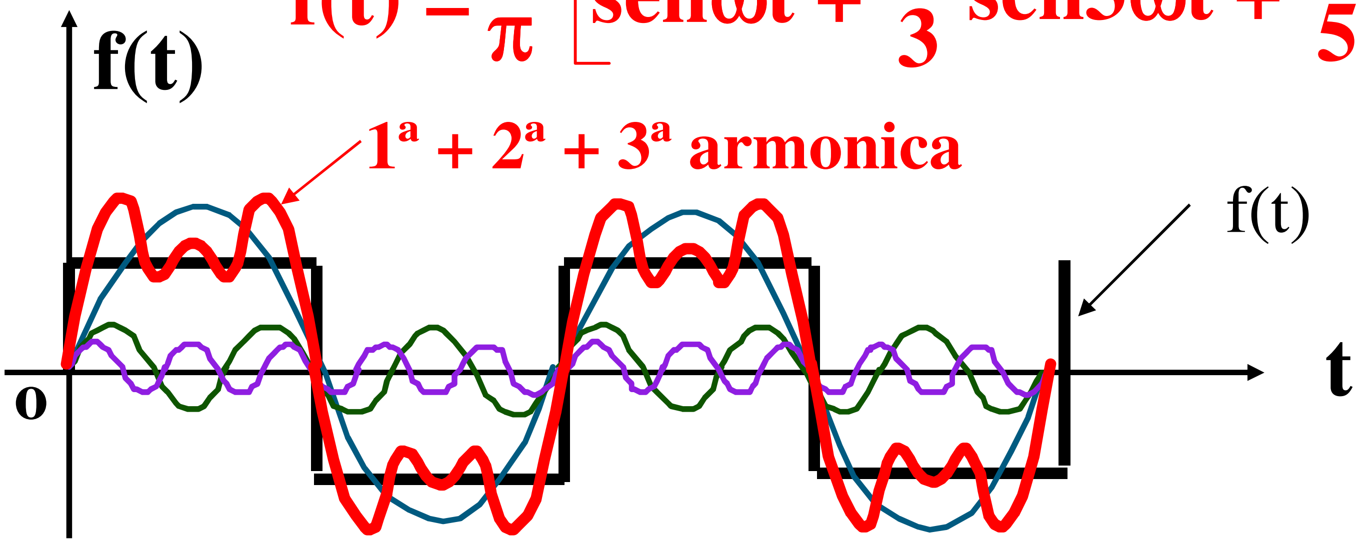
Esempio 1: portata Q = Q(t) del sangue in aorta

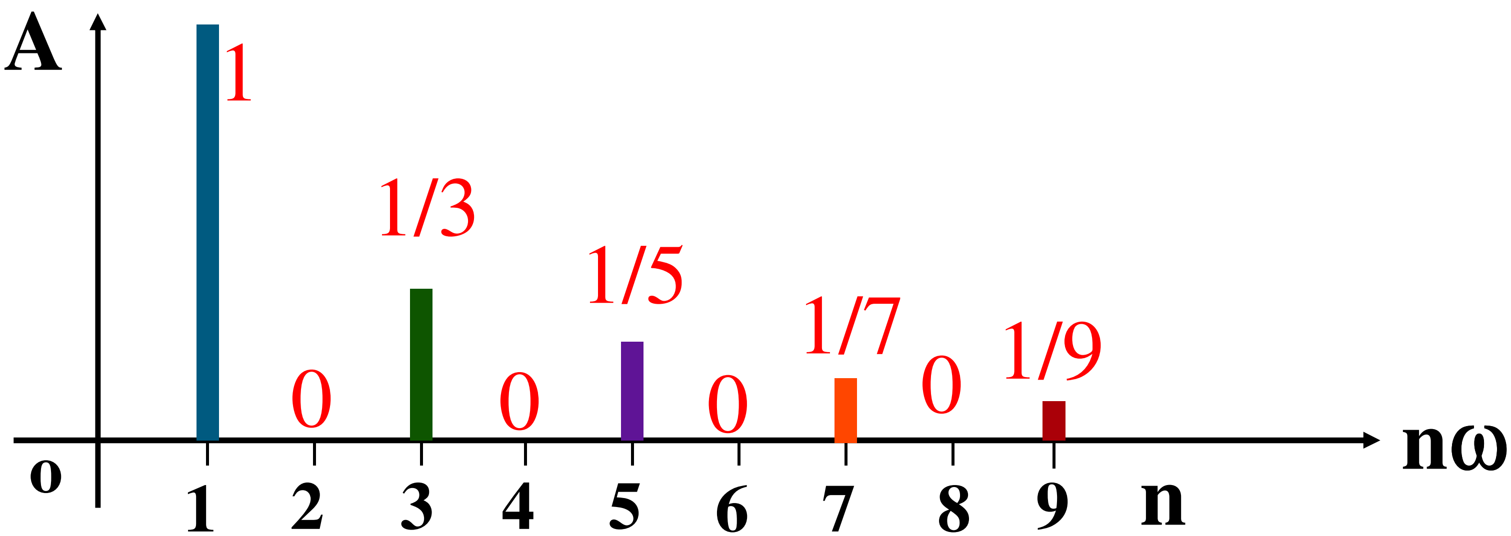


ANALISI DI FOURIER

Esempio 2: onda quadra

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen}\omega t + \frac{1}{3}\,\text{sen}3\omega t + \frac{1}{5}\,\text{sen}5\omega t + \dots\right]$$





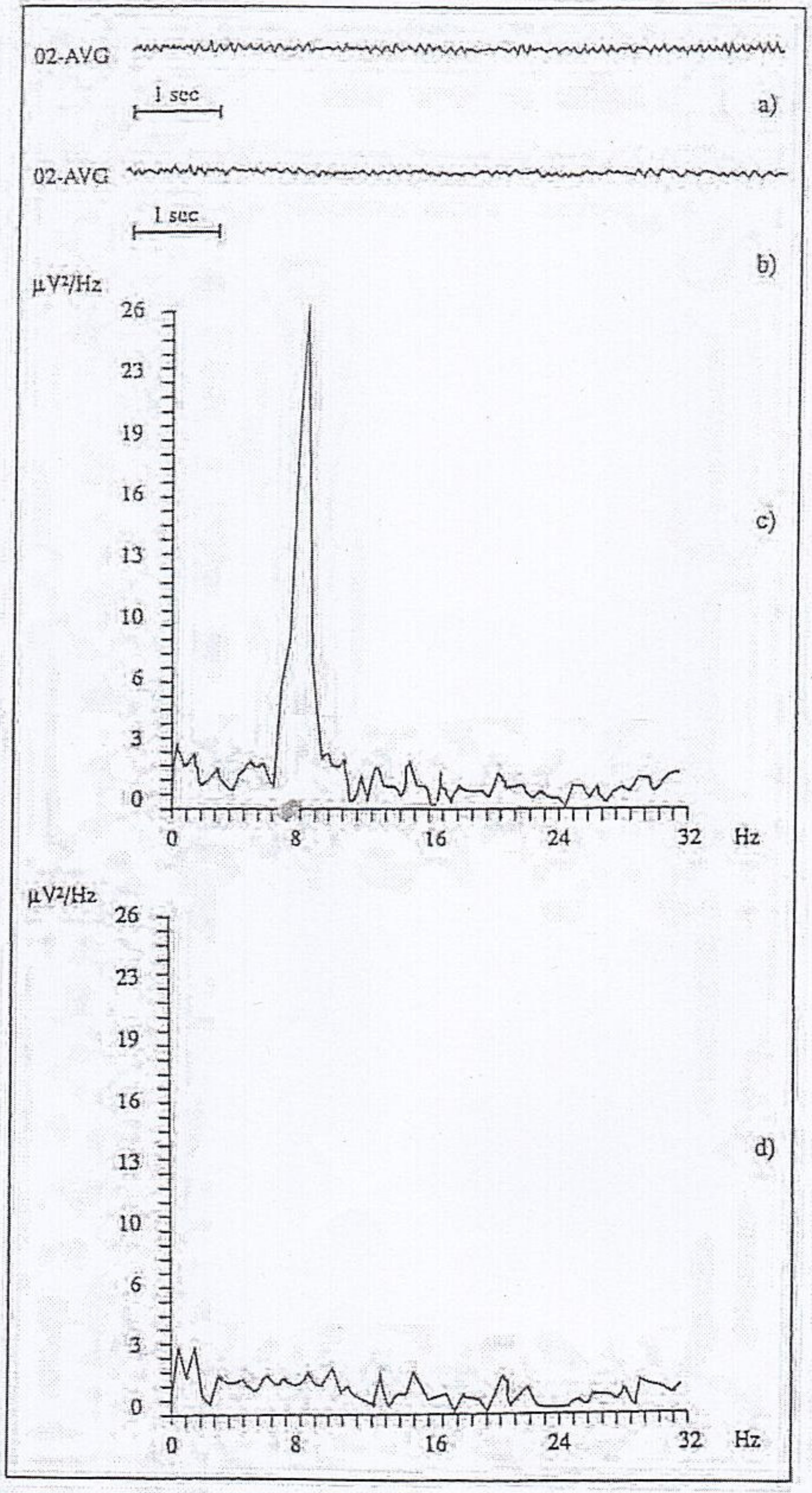

02-AVG
1 sec
a)
02-AVG
1 sec
b)
μV²/Hz
26
23
19
16
13
10
6
3
0
0
8
16
24
32
Hz
c)
μV²/Hz
26
23
19
16
13
10
6
3
0
0
8
16
24
32
Hz
d)

Fig. 9.30. a) Tracciato EEG di un soggetto normale derivato dalla regione occipitale destra, in veglia, ad occhi chiusi: ritmo alfa dominante.
b) Tracciato EEG dello stesso soggetto di a), registrato ad occhi aperti: scomparsa del ritmo alfa, presenza di attività a basso voltaggio. c) Spettro di potenza del tracciato riportato in a): si osservano armoniche dominanti intorno ad 8 Hz. d) Spettro di potenza del tracciato riportato in b): la differenza rispetto ad a) risulta evidente.

ANALISI E.E.G.

ElettroEncefaloGrafia

soggetto normale occhi chiusi

1 s

soggetto normale occhi aperti

1 s

E.E.G. : segnale non periodico !

soluzione :

il segnale è considerato *periodico* dopo un intervallo di tempo Δt sufficientemente lungo

analisi di Fourier

ANALISI E.E.G.

2

esempio: sia $\Delta t = 20$ secondi

- per l'armonica fondamentale: $\nu = \dfrac{1}{20\ \text{s}} = 0.05\ \text{Hz}$

- per trovare il numero massimo di armoniche: $n_{\mathbf{max}}$

Δt più piccolo in cui si hanno variazioni di segnale:

$$\Delta t \approx 0.01\ \text{s} \longrightarrow \nu \approx 100\ \text{Hz} \longrightarrow \nu_{\mathbf{max}} = 200\ \text{Hz}$$

(x2 per sicurezza)

ANALISI E.E.G.

3

essendo $\nu_{\mathbf{max}} = 200\ \text{Hz}$

$$\Rightarrow n_{\mathbf{max}} = \frac{200\ \text{Hz}}{0.05\ \text{Hz}} = 4000 \Rightarrow$$

- 4000 ampiezze $A_{\mathbf{i}}$ e 4000 ampiezze $B_{\mathbf{i}}$

oppure

- 4000 ampiezze $C_{\mathbf{i}}$ e 4000 fasi $\phi_{\mathbf{i}}$

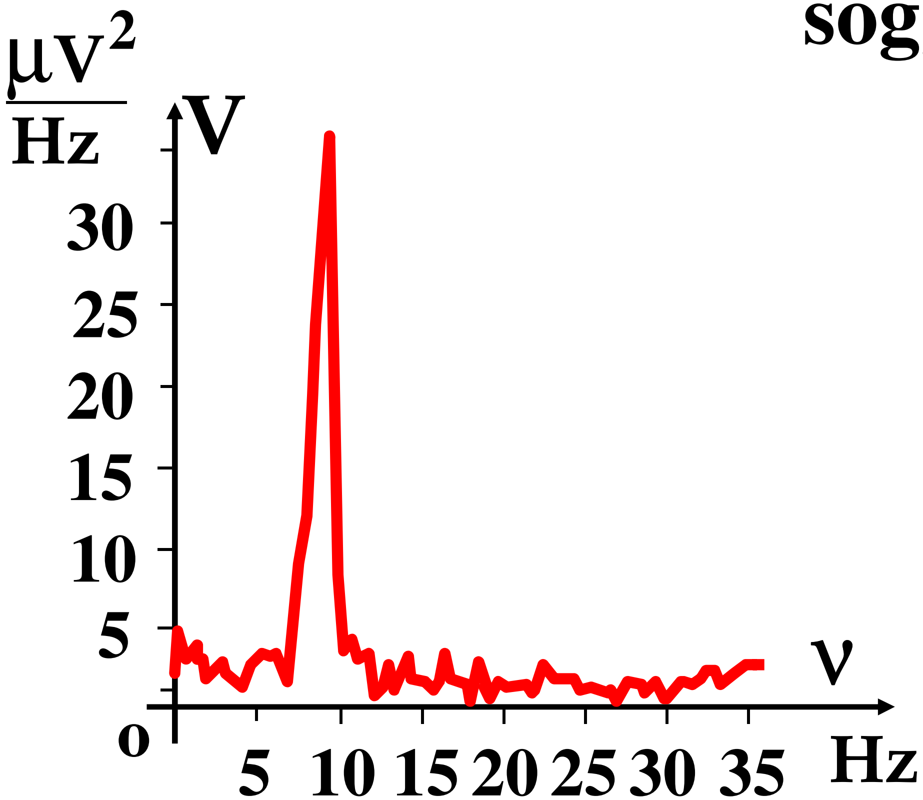
- banda passante = ν risolta dallo strumento ($\approx$ 1 Hz)
- unità di misura in ordinata dello spettro di potenza:

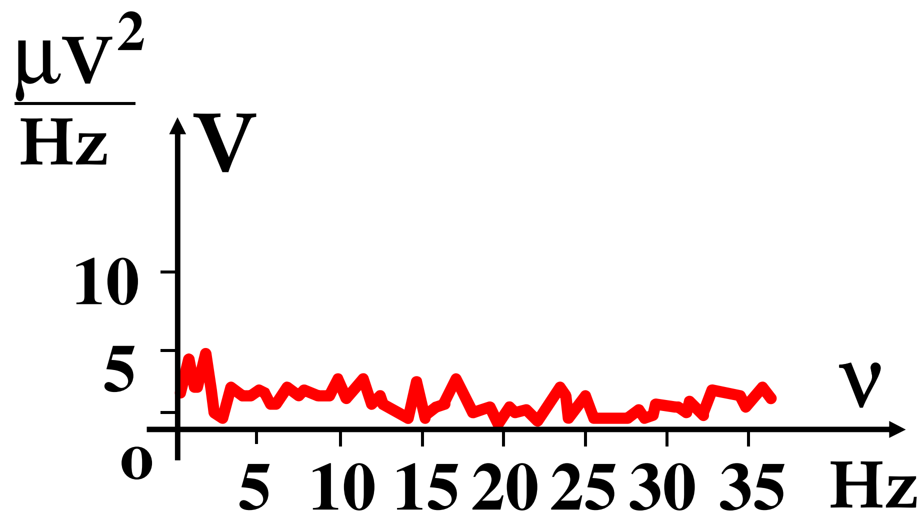
$\dfrac{\mu V^2}{\text{Hz}}$, proporzionale all'energia associata a ogni Hz di frequenza

ANALISI E.E.G.

4

soggetto normale a occhi aperti





Soggetto normale a occhi chiusi