Algebra 2 - Esame 7/7/2011

ALGEBRA 2
7 luglio 2011

Nome e Cognome:................................Matricola:..........................
Giustificare brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Dimostrare le seguenti affermazioni:

   (a) Sia $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ il gruppo trirettangolo si provi che $Aut(V) \cong S_3$

   (b) Sia $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ il gruppo delle matrici non singolari a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resti modulo 2: si descrivano gli elementi di $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ e si provi che $Aut(V) \cong GL_2(\mathbb{Z}_2)$

   (c) Sia G un gruppo abeliano tale che $Aut(G)$ non contenga elementi di ordine 2, allora tutti gli elementi di G hanno ordine che divide 2. (Suggerimento: considerare l'automorfismo $x \mapsto -x$.)

   d. Non esiste un gruppo ciclico finito G tale che $Aut(G) \cong \mathbb{Z}_m$ dove m è un numero dispari.

   e. Dare un esempio di un gruppo G tale che $Aut(G) \cong \mathbb{Z}_2$.

   f. Se $Aut(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.

2. Sia m un numero intero, consideriamo l'insieme:

$$R_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ mb & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

   (a) Dimostrare che R_m è sottoanello commutativo unitario di $M_2(\mathbb{Q})$.

   (b) Dimostrare che R_m è un campo se e solo se m non è il quadrato di un numero razionale.

3. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo reale e sia $I[x] =< x - 2 >$.

   (a) Come può essere rappresentato univocamente ogni laterale di $I[x]$ in $\mathbb{R}[x]$?

   (b) Si dimostri che $\dfrac{\mathbb{R}[x]}{I[x]} \simeq \mathbb{R}$ usando un'opportuna corrispondenza $f : \dfrac{\mathbb{R}[x]}{I[x]} \to \mathbb{R}$.

4. Si consideri l'endomorfismo φ dello spazio vettoriale $V = (\mathbb{Z}_5)^3$ definito da

$$\varphi(x, y, z) = (-2x + 2y + z, y - z, y + z),$$

   (a) Si determini la forma canonica razionale di φ e una base relativa.

   (b) Si determini, se esiste, la forma canonica di Jordan di φ e una base relativa.