ALGEBRA 2 e II
8 febbraio 2012

COGNOME:.............................. NOME:.................................
MATRICOLA:.............................

1. Sia G il gruppo $GL_3(Z)$ delle matrici 3×3 a coefficienti negli interi Z con determinante ± 1. Consideriamo il sottoinsieme H fatto dalle matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dove $x \in 2Z$, $y \in 6Z$, $z \in 3Z$, e sia N il sottoinsieme di H dove $x = z = 0$. Dimostrate che H è un sottogruppo di G. Dimostrate che N è un sottogruppo di H. N è sottogruppo normale di H? Se sì, il quoziente H/N è abeliano?
2. Sia $A = \{9, 33, 35, 45\}$. Per ogni $n \in A$ dimostrate che un gruppo G di ordine n è necessariamente abeliano. Per quali $n \in A$ il gruppo è necessariamente cicliclo? Per gli altri n per cui il gruppo non è necessariamente ciclico, quali sono le decomposizioni primarie possibili?
3. Sia $Z_3[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti negli interi modulo 3. Consideriamo i due ideali $I = (X^2 + 1)$ e $J = (X^2 + X + 1)$ e i relativi quozienti $A = Z_3[X]/I$ e $B = Z_3[X]/J$. A e B sono isomorfi come gruppi? A e B sono isomorfi come anelli? Sono campi? Elencare tutti gli ideali.