

15 settembre 2011, Algebra 2

1. Sia G un gruppo di ordine $12p$ con p primo $p > 5$
 - a) Se $p = 7$ provare che il 7-Sylow è normale mentre se $p > 11$ il p -Sylow è normale. Cosa succede se $p = 11$?
 - b) Dimostrare che non vi sono gruppi semplici di ordine $12p$ con p primo $p > 5$.

2. Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo \mathbb{Z}_p delle classi di resti mod. p , p primo e sia $I[x] = \langle x^2 - 7x + 12 \rangle$ si consideri $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{I[x]} = A$

α Come può essere rappresentato univocamente ogni laterale di $I[x]$ in $\mathbb{Z}_p[x]$?

β Trovare l'ordine di A e mostrare che non è un campo.

γ Determinare i divisori dello zero di A . Essi insieme allo zero costituiscono sempre per ogni primo p un ideale di A ?

3. Si consideri il gruppo abeliano G definito dalla presentazione

$$G = \langle x, y, z \mid x + y + z = x + 4y + z = 7x + 16y + 13z = 0 \rangle$$

- i. Dare una decomposizione di G in gruppi ciclici.
- ii. Dire se G sia isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. In caso affermativo, scrivere esplicitamente un isomorfismo.
- iii. Dire se G sia isomorfo a \mathbb{Z}_{18} . In caso affermativo, scrivere esplicitamente un isomorfismo.