$\boxed{\star}$ MATRICOLA: .... A ... B ... C ... D ... VOTO$^{\geq 10}$: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 17.07.13

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ il successore e sia $\mathbb{N} \uplus \mathbb{N}$ l'unione disgiunta.

1. È vero che $\{\sigma^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è infinito ? [Sì] | 2 | |

   Per ogni $n \neq 0$ si ha $\sigma^n(1) = n$, pertanto, se n ed m sono distinti ed entrambi maggiori di 0, si ha $\sigma^n \neq \sigma^m$. Ciò prova che l'applicazione di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $\{\sigma^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ definita da $n \mapsto \sigma^n$ è iniettiva, dunque l'insieme che stiamo considerando contiene una copia di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ed è infinito.

2. È vero che $|\mathbb{N} \uplus \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$? [Sì] | 2 | |

   Ricordando che $\mathbb{N} \uplus \mathbb{N}$ può essere identificato con $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$, consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{N} \uplus \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f((n, 0)) = 2n$ e $f((n, 1)) = 2n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si vede facilmente che si tratta di una biezione.

B Sia $\star$ l'operazione su $\mathbb{Z}$ definita da $n \star m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n + m & \text{per } n \text{ pari} \\ n - m & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

1. Mostrare che $(\mathbb{Z}, \star)$ è un semigruppo. | 2 | |

   Consideriamo i casi: (a) n pari, m pari; (b) n pari, m dispari; (c) n dispari, m pari; (d) n dispari, m dispari. Si ottiene che $(n \star m) \star z$ è rispettivamente: (a) $(n + m) + z$; (b) $(n + m) - z$; (c) $(n - m) - z$; (d) $(n - m) + z$. D'altra parte, $n \star (m \star z)$ è rispettivamente: (a) $n + (m + z)$; (b) $n + (m - z)$; (c) $n - (m + z)$; (d) $n - (m - z)$. Per le proprietà delle operazioni in $\mathbb{Z}$, è evidente che le espressioni in (a), (b), (c) e (d) sono rispettivamente uguali.

2. È vero che $(\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo? [Sì] | 2 | |

   Si verifica immediatamente che 0 funziona da elemento neutro; inoltre, se n è pari il suo inverso è $-n$, mentre se n è dispari il suo inverso è n.

C Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

1. È vero che -3 e 4 sono coprimi in A ? [Sì] | 2 | |

   Utilizzando la norma, si verifica che i divisori irriducibili di -3 sono $\pm i\sqrt{3}$, mentre quelli di 4 sono ± 2 e $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$. Non ci sono dunque fattori irriducibili in comune.

2. È vero che A è euclideo ? [No] | 2 | |

   A non è neppure un U.F.D., visto che 4 ha le due fattorizzazioni distinte $2 \cdot 2$ e $(1+i\sqrt{3}) \cdot (1-i\sqrt{3})$.

D Si consideri l'eq. diofantea $kx + 2y = k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1. L'eq. ha soluzioni in $\mathbb{Z}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$? [Sì] | 2 | |

   Evidentemente l'M.C.D. tra 2 e k è sempre un divisore di k.

2. Per $k = 2$ si hanno infinite soluzioni tali che $y \equiv_4 1$? [Sì] | 2 | |

   Le soluzioni sono tutte e sole le coppie di interi della forma $(x, 1-x)$. Basta scegliere dunque $x \equiv_4 0$.