PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 2 E ALGEBRA II
ANNO ACCADEMICO 2012-2013, 17 LUGLIO 2013

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1. Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G e, fissato $a \in G$, si considerino i sottoinsiemi

$$S_a = \{s \in H \mid \exists\, h \in H \text{ con } sah = a\}, \qquad D_a = \{d \in H \mid \exists\, k \in H \text{ con } kad = a\}.$$

(a) Provare che è di equivalenza la relazione $\mathcal{R}$ definita in G ponendo, per $a, b \in G$,

$$a\mathcal{R}b \quad \text{se e solo se} \quad \exists\, h_1, h_2 \in H \quad \text{tali che} \quad b = h_1 a h_2.$$

(b) Si verifichi che S_a e D_a sono sottogruppi di G, e $S_a = D_{a^{-1}}$.

(c) Se G è abeliano cosa succede?

(d) Si provi che in generale $S_a \neq D_a$. (Sugg.: si consideri $G = S_3$.)

Esercizio 2. Provare le seguenti affermazioni.

(a) Un gruppo di ordine 5 non ha automorfismi di periodo 3.

(b) Un gruppo di ordine 3^2 non ha automorfismi di periodo 5.

(c) Un gruppo di ordine 45 è necessariamente abeliano.

(d) Un gruppo di ordine 45 ha sottogruppi di indice 3 e sottogruppi di indice 5.

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{Z}_3[x]$ (l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ delle classi di resto modulo 3). Sia I l'ideale di A generato dal polinomio $f(x) = x^4 + x + 2$. Provare che I è massimale, determinare l'ordine dell'anello $K = A/I$, e l'ordine del gruppo moltiplicativo K^*.