NOME..COGNOME...
Matricola

Algebra 2 e II
18 gennaio 2012

1. Sia $(Mat_2(\mathbb{Z}_5), +, \cdot)$ l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ delle classi di resti $mod.5$ e si consideri il sottoinsieme

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

Giustificando la risposta si dica se $(X, +, \cdot)$ è un sottoanello di $Mat_2(\mathbb{Z}_5)$ (dotato di unità)

Posto $(U, \cdot)$ l'insieme degli elementi unitari di $(X, +, \cdot)$ si determini il suo ordine. Qual è il periodo di $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

2. Sia G un gruppo di ordine 56. Provare che G non è semplice

3. Siano $H, K \leq G$ tali che $G = H \times K$ e siano

$$\alpha : h \in H \mapsto h \in G$$
$$\beta : hk \in G \mapsto h \in H$$

Provare che $\varphi = \alpha\beta$ è un endomorfismo di G tale che $\varphi^2 = \varphi$ e dimostrare che se $K \neq \{I_G\}$ allora $\varphi \notin AutG$

4. Sia G un gruppo di ordine 75. Quanti sottogruppi di Sylow ci possono essere?

Sia Q un sottogruppo di indice 3 e P un sottogruppo di ordine 3, dimostrare che $G = PQ$

Supponendo che P sia normale, provare che G è abeliano e trovarne le decomposizioni primarie.

5. Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resti modulo p.

a) Si determinino i valori di p primo per i quali esistono polinomi $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ tali che sia identicamente soddisfatta la relazione

$$(x^2 + x + 4)f(x) + (x^2 + 5x)g(x) = 1$$

b) Sia $p = 2$ e sia $I[x] =< x^2 + 5x >$ e si consideri l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_p[x]}{I[x]}$. Si provi che A ha ordine 4, non è un campo e se ne determinino i divisori dello zero.