$\boxed{\Psi}$ MATRICOLA: .... A B$^{\leq 6}$: ...C D$^{\geq 4}$: ...1 2 3 4$^{\geq 8}$: ...VOTO: ......

NOME: ....COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 02.02.12

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Siano A e B due insiemi non vuoti disgiunti tali che esiste $f : A \to B$ iniettiva.

1. Se A è infinito allora B è infinito ? [ ] | 1 | |

2. Esiste $C \subseteq B$ non vuoto tale che $|A| = |C|$? [ ] | 1 | |

B Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione iniettiva e sia $f^n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la composta n-esima, $f^0 = id$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, etc...

1. Mostrare che f^n è iniettiva per ogni $n \in \mathbb{N}$. [ ] | 2 | |

2. Se f^n è surgettiva per qualche $n > 1$ allora f^n è bigettiva per ogni $n \in \mathbb{N}$? [ ] | 2 | |

C Sia $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n) = \{\text{matrici } 2 \times 2 \text{ ad entrate in } \mathbb{Z}_n\}$ con $n \geq 3$. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n)$ e sia $B \perp B' = A \cdot B + B' \cdot A$ per $B, B' \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n)$.

1. Esiste $B \neq 0, I$ tale che $B \perp I = 0$? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

2. Esiste $B \neq 0, I$ tale che $B \perp 0 = 0 \perp B$? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

3. $(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_n), \perp)$ è un semigruppo ? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

D Sia (A, δ) dominio euclideo con norma $\delta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$. Sia $I \subset A$ un ideale $I \neq 0, A$.

1. È vero che $I = (\pi)$ tale che $\delta(\pi)$ è il minimo di $\{\delta(a) \mid a \in I \;\; a \neq 0\}$? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

2. È vero che $\delta(a) > \delta(1)$ per ogni $a \in I \setminus \{0\}$? [ ] $\boxed{1}\boxed{}$

3. È vero che π è irriducibile ? [ ] $\boxed{1}\boxed{}$

1. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ il polinomio $f(X) = X^5 - 1$.

   (a) $\dfrac{f(X)}{X-1}$ ammette la radice 1 ? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

   (b) Sia $\mu_5 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid f(\zeta) = 0\}$. È vero che $\mu_5 \subset \mathbb{C}^*$ è un sottogruppo finito ? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

2. Sia $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \times \mathbb{Q} \setminus \{-1/2\}$ e sia $\star$ l'operazione così definita:

$$(x, y) \star (x', y') = (x + 2y' + 2xy', x'/2 + y + x'y)$$

   per $(x, y), (x', y') \in G$.

   (a) G è chiuso rispetto a $\star$? [ ] $\boxed{1}\boxed{}$

   (b) $(G, \star)$ è un semigruppo ? [ ] $\boxed{2}\boxed{}$

3. Consideriamo la relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ definita da $a+b\sqrt{-2} \equiv c+d\sqrt{-2}$ se $a \equiv_3 b$ e $c \equiv_3 d$. Le classi di equivalenza costituiscono un anello che denotiamo

$$A = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$

(a) Mostrare che A non è un campo. | 2 | |

(b) È vero che $x = x^3$ per ogni $x \in A$? [ ] | 2 | |

4. Sia $\phi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ l'applicazione $\phi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ con $x \in \mathbb{Z}_n$ e $n \geq 2$. È vero che per ogni $n \geq 2$:

(a) esiste x tale che $\phi_n(x) = x$? [ ] | 2 | |

(b) $\phi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ non è surgettiva ? [ ] | 2 | |