

\oplus MATRICOLA: A...B...C...D... VOTO ≥ 10 :

NOME: COGNOME:

Algebra 1 – Esame 14.06.12

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia X un insieme infinito, Y e Z due sottoinsiemi di X , dove Y è finito e Z è infinito.

1. L'insieme $X \setminus Y$ è finito, infinito, o dipende dalla scelta di X e Y ?

1	
---	--

2. L'insieme $X \setminus Z$ è finito, infinito, o dipende dalla scelta di X e Z ?

1	
---	--

3. Sia ρ una relazione di equivalenza su X , l'insieme delle classi X/ρ è finito, infinito o dipende dalla scelta di X e ρ ?

2	
---	--

B Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x+1)e^x$. Si calcoli per induzione $f^{(n)}(x)$ la derivata n -esima

$$f^{(n)}(x) = ((n+1) + x)e^x$$

2	
---	--

C Sia $G = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ e sia \star la legge così definita:

$$(a_1, b_1, c_1) \star (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + (-1)^{c_1} a_2, b_1 (-1)^{c_1} b_2, c_1 + c_2).$$

1. (G, \star) è un gruppo?

2	
---	--

2. Posto $H = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{Z}\}$ e $K = \{(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{Z}\}$ sono sottogruppi?

2	
---	--

3. Descrivere $H \cap K$.

2	
---	--

D Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo \mathbb{Z}_5 delle classi di resti modulo 5 e siano $f_k(x) = x^5 + kx + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{Z}_5$, $f_k(x)$ ammette radici in \mathbb{Z}_5 ?

2	
---	--

2. Per $k = 2$ decomporre $f_2(x)$ nel prodotto di polinomi irriducibili.

2	
---	--