☉ MATRICOLA: .... **F** **E** **SI** **NO**

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Prova Intermedia: I Esonero 18.11.13

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Sia X un insieme. Vogliamo trovare delle condizioni su X che implichino l'esistenza di due sottoinsiemi X_1 e X_2 tali che $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X = X_1 \cup X_2$ e $|X| = |X_1| = |X_2|$.

   (a) Se X è finito, esistono tali insiemi ? [No] 2

   Se X è finito, allora non ha alcun sottoinsieme proprio con la sua stessa cardinalità; dunque un insieme finito che soddisfi le ipotesi è necessariamente vuoto. La proposizione è dunque falsa in generale, e come controesempio possiamo prendere l'insieme $X = \{0\}$.

   (b) Se $X = \mathbb{N}$, esistono tali insiemi ? [Sì] 2

   Se definiamo X_1 come l'insieme dei numeri pari e X_2 come l'insieme dei numeri dispari, le proprietà richieste sono tutte soddisfatte.

   (c) Se X è numerabile, esistono tali insiemi ? Se sì, descriverli esplicitamente. [Sì] 2

   Poiché X è numerabile, esiste una biezione ϕ di $\mathbb{N}$ in X. Denotando con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari, si verifica allora facilmente che gli insiemi $X_1 = \phi(\mathbb{P})$ e $X_2 = \phi(\mathbb{N} \backslash \mathbb{P})$ soddisfano le proprietà richieste.

2. Sia $(\mathbb{N}, +)$ il monoide additivo dei numeri naturali. Si fissino $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ponga per $x, y \in \mathbb{N}$

$$x\mathcal{R}y \text{ se } x = y \text{ oppure } x \geq k, y \geq k \text{ e } n \text{ divide } x - y \text{ in } \mathbb{Z}.$$

   (a) $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$? [Sì] 2

   Verifichiamo che siano soddisfatte le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Le prime due sono ovviamente soddisfatte. Per quanto riguarda la transitività, supponiamo $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, e proviamo che vale $x\mathcal{R}z$; l'ipotesi è dunque $\{$(a) $x = y$ *oppure* (b) $x \geq k, y \geq k$ *e* n *divide* $x - y$ *in* $\mathbb{Z}\}$, *e* $\{$(c) $y = z$ *oppure* (d) $y \geq k, z \geq k$ *e* n *divide* $y - z$ *in* $\mathbb{Z}\}$, *e dobbiamo provare che vale* (e) $x = z$ *oppure* (f) $x \geq k, z \geq k$ *e* n *divide* $x - z$ *in* $\mathbb{Z}$. *Ebbene,* (a) *e* (c) *implicano* (e); (a) *e* (d) *implicano* (f), *così come* (b) *e* (c); *infine,* (b) *e* (d) *implicano* (f), *poiché se* n *divide sia* $x - y$ *che* $y - z$ *allora* n *divide anche* $(x - y) + (y - z) = x - z$.

   (b) È vero che se $x\mathcal{R}y$ e $z\mathcal{R}t$ allora $(x + z)\mathcal{R}(y + t)$? [Sì] 2

   La nostra ipotesi è $\{$(a) $x = y$ *oppure* (b) $x \geq k, y \geq k$ *e* n *divide* $x - y$ *in* $\mathbb{Z}\}$, *e* $\{$(c) $z = t$ *oppure* (d) $z \geq k, t \geq k$ *e* n *divide* $z - t$ *in* $\mathbb{Z}\}$; *dobbiamo provare che vale* (e) $x + z = y + t$ *oppure* (f) $x + z \geq k, y + t \geq k$ *e* n *divide* $(x + z) - (y + t)$ *in* $\mathbb{Z}$. *Ebbene,* (a) *e* (c) *implicano* (e); (a) *e* (d) *implicano* (f), *così come* (b) *e* (c); *infine,* (b) *e* (d) *implicano* (f), *poiché se* n *divide sia* $x - y$ *che* $z - t$ *allora* n *divide anche* $(x + z) - (y + t) = (x - y) + (z - t)$.

3. Provare per induzione su $n \geq 1$ che $2^{2n} - 1$ è divisibile per 3. 2

Per $n = 1$ *la proposizione è vera (l'espressione vale* 3*). Sia allora* $n \geq 1$ *e, supponendo vera la proposizione per* n *(ovvero, supponendo che esista* $k \in \mathbb{Z}$ *tale che* $2^{2n} = 3k + 1$*), la proviamo vera per* $n + 1$*. Si ha*

$$2^{2(n+1)} = 4 \cdot 2^{2n} = 4(3k + 1) = 3(4k + 1) + 1,$$

da cui otteniamo che $2^{2(n+1)} - 1 = 3(4k + 1)$ *è divisibile per* 3*.*

4. Sia data l'equazione diofantea $5kx + 3hy = 16$ con $k, h, x, y \in \mathbb{Z}$.

   (a) E' risolubile per ogni coppia k, h con $(k, h) = 1$? [No] 2

   Per $(k, h) = (3, 5)$*, l'equazione diventa* $15(x + y) = 16$*, che non ha evidentemente alcuna soluzione nelle variabili* x, y*.*

   (b) Per $k = 2, h = 1$ le soluzioni sono $[\{(1 + 3t, 2 - 10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\}]$ 2

   Per $(k, h) = (2, 1)$ *l'equazione diventa* $10x + 3y = 16$*, che ha soluzioni poiché* 10 *e* 3 *sono coprimi. Si esprime facilmente l'MCD tra* 10 *e* 3 *come combinazione a coefficienti interi di questi due numeri:* $1 = 1 \cdot 10 + (-3) \cdot 3$*, da cui, moltiplicando per* 16 *entrambi i membri, si ricava la soluzione particolare* $(16, -48)$*. È noto che da questa si ricava la soluzione generale*

$$\{(16 + 3t, -48 - 10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\} = \{(1 + 3t, 2 - 10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Sia $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{20}\}$. Si definisca in S una legge $\star$ ponendo $\forall (a, b), (c, d) \in S$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + 5bc).$$

   (a) È vero che $\star$ è commutativa ? [No] 2

   Si ha $(1, 1) \star (1, 2) = (1, 7)$*, mentre* $(1, 2) \star (1, 1) = (1, 11)$*.*

   (b) È vero che $\star$ è associativa ? [Sì] 2

   Si ha

$$[(a, b) \star (c, d)] \star (e, f) = ((ac)e, (ac)f + 5(ad + 5bc)e),$$

   mentre

$$(a, b) \star [(c, d) \star (e, f)] = (a(ce), a(cf + 5de) + 5b(ce)).$$

   Come si può facilmente verificare tenendo conto delle proprietà algebriche di $\mathbb{Z}_{20}$*, le due espressioni sono uguali.*

   (c) È vero che la coppia $(0, 1)$ è elemento neutro? [No] 2

   Si ha $(1, 1) \star (0, 1) = (0, 1)$*.*