$\boxed{\odot}$ Matricola: .... **F** **E** | **SI** | **NO**

Nome: .... Cognome: ....

Algebra 1 – Prova Intermedia: I Esonero 19.11.12

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Sia $X = n^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{N} \to n$ dove $n = \{0, \dots, n-1\}$ è un numero naturale $n \geq 2$. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su X tale che $f \sim g$ se $f(0) = g(0)$ per $f, g \in X$.

   (a) Una classe di equivalenza costituisce un insieme infinito ? [Sì] | 2 |

   Osserviamo innanzi tutto che ogni elemento f di X può essere identificato con la successione $\{f(0), f(1), f(2), ...\}$ a valori in n. Sia dunque $f \in X$, e si fissi $i \in n \setminus \{f(0)\}$ (osserviamo che $n \setminus \{f(0)\}$ è non vuoto per ipotesi); per $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia g_j l'elemento di X identificato con la successione che vale sempre $f(0)$ eccetto al posto j-simo, in cui ha valore i. La classe di equivalenza di f contiene senz'altro l'insieme $\{g_j : j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, che è evidentemente infinito, ed è pertanto infinita.

   (b) È vero che $f \sim g$ implica $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \neq \emptyset$? [No] | 2 |

   Si consideri ad esempio la funzione f che assume valore 1 su ogni numero naturale. Si ha $f \sim f$, ma $f^{-1}(0) = \emptyset$.

   (c) È vero che $|X/\sim| = n$? [Sì] | 2 |

   È evidente che $[f] \mapsto f(0)$ è un'applicazione ben definita da X in n, ed è una biezione.

2. Si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da $(n, m)\mathcal{R}(n', m')$ se si ha che $n \leq n'$ e $m'|m$ dove $n, n', m, m' \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostrare che la relazione $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine per $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. | 2 |

   Le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva sono ereditate in modo ovvio da quelle dei due ordinamenti considerati su $\mathbb{N}$. (Si noti che la seconda relazione è antisimmetrica in quanto l'insieme su cui è definita è $\mathbb{N}$; infatti, se $m, m' \in \mathbb{Z}$ sono tali che $m' \mid m$ e $m \mid m'$, si ottiene $m' = \pm m$..)

   (b) È vero che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è totalmente ordinato rispetto alla relazione $\mathcal{R}$? [No] | 2 |

   Infatti, l'ordinamento sul secondo fattore non è totale. Ad esempio, le coppie $(0, 2)$ e $(0, 3)$ non sono confrontabili mediante la relazione $\mathcal{R}$.

   (c) È vero che $S \times \{m\}$ ha minimo per ogni $S \subseteq \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$? [No] | 2 |

   Se $S = \emptyset$, l'insieme $S \times \{m\}$ non ha minimo per alcun $m \in \mathbb{N}$. (D'altra parte, se S è non vuoto, allora S ha minimo μ rispetto al primo dei due ordinamenti, e l'elemento (μ, m) risulta il minimo di $S \times \{m\}$.)

3. Provare per induzione su $n \geq 2$ che

$$\prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

2	

Proviamo che l'uguaglianza è vera per $n = 2$*: si ha* $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$*, dunque la base dell'induzione è verificata. Supponiamo ora la proposizione vera per un fissato* $n \geq 2$ *e proviamola vera per* $n+1$*:*

$$\prod_{m=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \left[\prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

come si voleva.

4. Si determini la minima soluzione positiva del seguente sistema di congruenze

2	

$$\begin{cases} 2x \equiv_3 27 \\ x \equiv_7 -13 \end{cases}$$

La prima congruenza è $-x \equiv_3 0$*, da cui* $x \equiv_3 0$*, e dunque esiste* $h \in \mathbb{Z}$ *tale che* $x = 3h$*. Sostituendo nella seconda congruenza, otteniamo* $3h \equiv_7 1$*. L'inverso di 3 modulo 7 è 5, dunque si ottiene* $h \equiv_7 5$*, da cui* $h = 7k + 5$ *per un opportuno* $k \in \mathbb{Z}$*. Concludiamo che è* $x = 21k + 15$*, ed il minimo intero positivo di questa forma è evidentemente 15. (In sostanza, si tratta di determinare il minimo multiplo positivo di 3 che sia congruo 1 modulo 7..)*

5. In $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ con $n, m > 1$ si consideri l'operazione $\star$ così definita: $(a, b) \star (c, d) = (ac, bd)$ per $a, c \in \mathbb{Z}_n$ e $b, d \in \mathbb{Z}_m$. Sia $\mathbb{Z}_m^*$ gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_m$.

   (a) È vero che $\star$ è commutativa ? [Sì]

2	

   Segue immediatamente dalla commutatività del prodotto in $\mathbb{Z}_n$ *ed in* $\mathbb{Z}_m$*.*

   (b) È vero che $\star$ è associativa ? [Sì]

2	

   Come sopra.

   (c) È vero che $\star$ ammette elemento neutro? [Sì]

2	

   Come sopra.

   (d) È vero che $\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$ è un gruppo rispetto a $\star$ per p e q primi distinti ? [Sì]

2	

   Poiché, per ogni $n > 1$, $(\mathbb{Z}_n, \cdot, 1)$ *è un monoide, si ha che* $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ *è un gruppo. Lo è allora evidentemente anche* $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$*, visto che si ha* $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$ *per ogni* $(x, y) \in \mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*$*. (Si noti che, nel caso particolare in cui n ed m siano coprimi, esiste una biezione di* $\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*$ *in* $\mathbb{Z}_{mn}^*$*, che "conserva" somma e prodotto .)*