$\oplus$ MATRICOLA: .... A...B...C...D...VOTO: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 2 – Esame 10.07.12

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia A_5 il sottogruppo di S_5 fatto dalle permutazioni pari su 5 elementi, ovvero delle permutazioni che si scrivono come prodotto di un numero pari di trasposizioni.

1. Quali sono gli ordini di S_5 e A_5, e quali sono le strutture cicliche degli elementi di S_5 e A_5? Qual è il massimo ordine degli elementi di S_5 e A_5?
2. Dimostrare che il prodotto di due trasposizioni in S_5 si può scrivere come composta di 3-cicli. (Suggerimento: se le trasposizioni sono disgiunte allora $(ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd)$...)
3. Consideriamo due permutazioni $a = (123)$ e $b = (xyz)$. Esibire un $\sigma \in A_5$ tale che $\sigma^{-1}a\sigma = b$. (Suggerimento: sicuramente esiste un $\sigma \in S_5$ perché...; se il σ è pari... altrimenti se viene composto con una trasposizione opportuna...)
4. Dimostrare che A_5 è semplice, cioè non ammette sottogruppi normali non banali. (Suggerimento: usando i punti precedenti basta dimostrare che contiene un 3-ciclo...)

B Sia $H = SL_2(\mathbb{Z}_3)$ l'insieme della matrici due per due sul campo $\mathbb{Z}_3$ a determinante uguale ad uno.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3 \quad ad - cb = 1 \right\}.$$

Sia inoltre $G = GL_2(\mathbb{Z}_3)$ il gruppo delle matrici invertibili due per due a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$. Sappiamo che $|G| = 48$.

1. Assumendo che $[G : H] = 2$ e usando i teoremi di Sylow, dire quanti sono i possibili 2-Sylow e 3-Sylow di H.
2. Assumendo che $[G : H] = 2$, controllare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ abbia ordine 3. Quanti sono i 3-Sylow di H?
3. Dimostrare che $[G : H] = 2$ e che H è un sottogruppo normale di G (Sugg.: si consideri il determinante delle matrici.).
4. Dimostrare che esiste un solo 2-Sylow in H. (Suggerimento: si consideri l'azione per coniugio di G sull'insieme dei suoi 3-Sylow, e si tenga presente che $H \not\cong S_4$).

C Siano $J_1 = (x^3 + x + 1)$ e $J_2 = (x^4 + x^2 + 1)$ ideali di $\mathbb{Z}_2[x]$, e siano $I_1 = (2, x^3 + x + 1)$ e $I_2 = (2, x^4 + x^2 + 1)$ ideali di $\mathbb{Z}[x]$.

1. Quale degli ideali J_i è primo?
2. Quale degli ideali J_i è massimale?
3. Se J_i non è massimale, trovare un elemento non nullo e non invertibile in $\mathbb{Z}_2[x]/J_i$.
4. Quali degli ideali I_i sono primi e/o massimali? (Suggerimento: dimostrare che $\mathbb{Z}[x]/I_i \cong \mathbb{Z}_2[x]/J_i$.)

D Si consideri il seguende gruppo abeliano definito per generatori e relazioni:

$$G =< x, y \mid 2x + 6y = 2x + 12y = 0 >$$

1. Trovare una decomposizione primaria di G.
2. Quali sono le classi di isomorfismo dei sottogruppi di G?
3. Trovare i generatori dei sottogruppi del punto precedente.
4. Che ordine hanno x e y?