PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 2
ANNO ACCADEMICO 2012-2013, 12 GIUGNO 2013

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1.

(a) Sia $G = \mathrm{GL}_3(3)$. Si determinino l'ordine di G, un $3-$sottogruppo di Sylow S di G, e i periodi degli elementi di S.

(b) Per ciascuna delle seguenti affermazioni si fornisca una dimostrazione o un controesempio:
   (a) Sia G un gruppo: se per ogni $x \in G$ si ha $x^2 = 1$, allora G è abeliano.
   (b) Sia G un gruppo: se per ogni $x \in G$ si ha $x^2 = 1$, allora G è ciclico.
   (c) Sia G un gruppo e p un primo: se per ogni $x \in G$ si ha $x^p = 1$, allora G è abeliano.
   (d) Sia G un gruppo e p un primo: se per ogni $x \in G$ si ha $x^p = 1$, allora G è ciclico.

(c) Sia G un gruppo. Provare che se esistono $x, y \in G$ tali che $y^{-1}xy = x^{-1}$ allora G ha un elemento di periodo 2.

Esercizio 2. Considerato il sottoanello di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, z, t \in \mathbb{Q} \right\},$$

provare che l'applicazione

$$f : \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

è un endomorfismo di A e determinare $f(A)$ e $\ker f$.

Esercizio 3. Consideriamo gli anelli $A_p = \mathbb{Z}_p[X]/(X^2 + 1)$ dove p è un numero primo.

(a) L'anello A_2 è un campo? Come gruppo abeliano rispetto alla somma è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$? E come anello (con il prodotto in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definito da $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$)?

(b) L'anello A_3 è un campo? Come gruppo abeliano è isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$? E come anello?