

⊕ MATRICOLA: A...B...C...D...VOTO:

NOME: COGNOME:

Algebra 2 – Esame 14.06.12

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia H l'insieme delle matrici a coefficienti in \mathbb{F}_2 della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si dimostri che H è un sottogruppo del gruppo $GL_4(\mathbb{F}_2)$ e si calcoli l'ordine di H .
2. Si descriva il centro Z di H .
3. Si descriva il quoziente H/Z . Si determini in particolare se H/Z è ciclico.

B Sia G un gruppo finito, ed H un sottogruppo di G con $|G : H| = 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, dimostrandole se vere o fornendo un controesempio se false.

1. H è massimale in G , cioè non esiste alcun sottogruppo proprio di G che contenga propriamente H .
2. $H \trianglelefteq G$.
3. Se $|G|$ è dispari, allora $H \trianglelefteq G$. (Sugg.: si consideri l'insieme X dei laterali destri di H in G , e si consideri l'azione di G per moltiplicazione a destra su X .)

C Sia $f = x^4 + x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Sia A l'anello quoziente $A = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$.

1. A è un dominio?
2. Esistono elementi nilpotenti non nulli in A ?
3. Provare che $x^2 + 1 + (f)$ è invertibile in A .
4. Elencare tutti gli ideali di A .

D Si consideri il seguente gruppo abeliano definito per generatori e relazioni:

$$G = \langle x, y \mid 24x + 16y = 16x + 24y = 0 \rangle$$

1. Che ordine ha G ?
2. Se esiste, trovare n tale che $G \simeq \mathbb{Z}_n$.
3. Se esistono, trovare n, m tali che $G \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.
4. Se in uno dei due precedenti casi la risposta è positiva, descrivere esplicitamente l'isomorfismo (cioè dare l'immagine di x e y e controllare che sia un isomorfismo di gruppi).