

⊕ MATRICOLA: A...B...C... VOTO:

NOME: COGNOME:

Algebra 2 – Esame 20.09.12

A Sia S_n il gruppo delle permutazioni di n elementi.

1. Una *involuzione* è una permutazione σ tale che $\sigma^2 = 1$. Quante sono le involuzioni di S_5 e che struttura ciclica hanno?
2. Sia F un automorfismo di S_n . Dimostrare che se σ è un'involuzione, così è anche $F(\sigma)$. Dimostrare che se a e b sono permutazioni coniugate, così sono anche $F(a)$ e $F(b)$.
3. Sia F un automorfismo di S_5 . Usando i punti precedenti, dimostrare che F manda trasposizioni in trasposizioni, cioè $F(ab) = (cd)$ per ogni (ab) .
4. Dimostrare che ogni automorfismo di S_5 è interno.

B Sia G un gruppo. Si dimostri che:

1. se $|G| = 45$, allora G è abeliano;
2. se $|G| = 408$, allora esiste $H \leq G$ con $|G : H| = 3$.

C Nell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$, consideriamo i polinomi $f_a(x) = x^2 + ax + 1$ dove $a \in \mathbb{Z}_5$ e i corrispondenti ideali $J_a = (f_a)$ e gli anelli quozienti $A_a = \mathbb{Z}_5[x]/J_a$.

1. Per quali a l'anello A_a è un dominio?
2. A_0 e A_1 sono isomorfi come anelli?
3. Siano i e j tali che sia A_i che A_j non siano domini, sono allora isomorfi come anelli?

D Si considerino i gruppi $G = \mathbb{Z}/\langle 3 \rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle a^3 + a^2 \rangle$ e $H = \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle a \rangle$, con $a \in \mathbb{Z}$.

1. Per quali valori di a il gruppo H è ciclico?
2. Per quali valori di a i due gruppi hanno la stessa cardinalità?
3. Per quali valori di a i due gruppi risultano isomorfi?