PROVA INTERMEDIA DI ALGEBRA 2
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
ANNO ACCADEMICO 2011-2012, 26 APRILE 2012

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1. Nel gruppo delle permutazioni di 8 elementi S_8, siano $a = (1234)(5678)$ e $b = (1537)(2846)$.

(a) Qual è l'ordine di a e b?
(b) Elencare gli elementi del sottogruppo $H = < a, b >$.
(c) Elencare gli ordini degli elementi e i sottogruppi di H.
(d) Quali dei sottogruppi propri di H sono normali?
(e) Il gruppo H è isomorfo a un gruppo diedrale?

Esercizio 2. Sia V il gruppo $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, e $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ il gruppo delle matrici invertibili, di dimensione 2×2, a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$. (N.B., G è il gruppo degli automorfismi di V, e $|G| = 48$. Per ogni $\alpha \in G$ e $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$, l'elemento $(a,b) \cdot \alpha \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ è il prodotto riga per colonna della riga (a,b) per la matrice α.)

(a) Determinare i periodi degli elementi di V. Detto $\mathcal{S}$ l'insieme dei sottogruppi propri non banali di V, determinare il tipo di isomorfismo dei sottogruppi in $\mathcal{S}$, e determinare la cardinalità di $\mathcal{S}$.

(b) Fissato $\alpha \in G$, si provi che $\langle (a,b) \rangle \mapsto \langle (a,b) \cdot \alpha \rangle$ definisce una biezione ϕ_α di $\mathcal{S}$ in sé.

(c) Provare che la mappa $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\mathcal{S})$ definita da $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ è un omomorfismo di gruppi, e determinarne nucleo ed immagine.

(d) Si deduca dal punto precedente che G ha un sottogruppo normale di ordine 8.

Esercizio 3. Sia G un gruppo. Dati $h, k \in G$, definiamo l'elemento $[h,k] := h^{-1}k^{-1}hk$ e, dati H, K sottogruppi di G, definiamo il sottogruppo $[H,K] := \langle [h,k] \ : \ h \in H, \ k \in K \rangle$.

(a) Provare che, per ogni $g, h, k \in G$, si ha $g^{-1}[h,k]g = [g^{-1}hg, g^{-1}kg]$. Dedurre che $[G,G]$ è un sottogruppo normale di G.

(b) Provare che il gruppo quoziente $G/[G,G]$ è abeliano. Dedurre che, se T è un sottogruppo di G contenente $[G,G]$, allora $T \trianglelefteq G$.

(c) Per $N \leq G$, provare che $N \trianglelefteq G$ se e solo se $[G,N] \subseteq N$; inoltre $N \leq Z(G)$ se e solo se $[G,N] = 1$.

(d) Per $N \trianglelefteq G$, provare che $N \cap [G,G] = 1$ implica $N \leq Z(G)$.