PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 4
ANNO ACCADEMICO 2012-2013, 16 LUGLIO 2013

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1. Sia M un A-modulo e $f : M \mapsto A$ un morfismo suriettivo. Dimostrare che $M \cong ker(f) \oplus A$.

Esercizio 2. Dato G gruppo abeliano, dimostrare che $G \otimes \mathbb{Z}/n \cong G/nG$.

Esercizio 3. Provare che le seguenti condizioni su un anello A sono equivalenti:

(1) ogni modulo è proiettivo;
(2) ogni modulo è iniettivo;
(3) tutte le sequenze esatte corte sono spezzanti.

Esercizio 4. Sia A anello e M un A-modulo.

(1) Siano $m_1, \dots, m_r \in M$ e consideriamo la mappa $\varphi : A \to M^r$ definita da $\varphi(a) = (am_1, \dots, am_r)$. Dimostrare che $ker(\varphi) = Ann(< m_1, \dots, m_r >)$.
(2) Sia M Noetheriano su A, dimostrare che $A/Ann(M)$ è Noetheriano come A-modulo.

Esercizio 5. Sia A un anello commutativo con identità e I un ideale di A.

(1) Siano $a, b, c \in I$. Dimostrare che $a(b \wedge c) = a \wedge (bc) = (bc) \wedge a$;
(2) Se 2 è invertibile in A, dimostrare che I annulla $\wedge^2 I$.
(3) Nelle condizioni del punto precedente, dimostrare che I annulla $\wedge^k I$ per ogni $k \geq 2$.