PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 4
21 NOVEMBRE 2013

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato di rango r.

(1) Dimostrare che $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r$.

(2) Dimostrare che esistono infiniti primi p tali che $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong (\mathbb{Z}_p)^r$.

Esercizio 2. Sia $(R, \mathfrak{m})$ un anello locale, M e N due R-moduli finitamente generati e $f : M \to N$ un morfismo di R-moduli. Consideriamo $\bar{f} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ la mappa indotta sui moduli quoziente.

(1) Dimostrare che f è suriettiva se e solo se $\bar{f}$ è suriettiva.

(2) Dimostrare che se f è iniettiva spezzante allora anche $\bar{f}$ è iniettiva spezzante.

(3) Dire se è vero che se f è iniettiva, allora anche $\bar{f}$ è iniettiva.

Esercizio 3. Consideriamo la sequenza esatta di R-moduli $0 \to A \to B \to C \to 0$. Dimostrare che un morfismo $\alpha : A \to A'$ si estende a B (cioè esiste un $\tilde{\alpha} : B \to A'$ la cui restrizione ad A concide con α) se e solo se la sequenza $0 \to A' \to B' \to C \to 0$ indotta da α via pushout è spezzante.