

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 2
ANNO ACCADEMICO 2011-2012, 21 NOVEMBRE 2012

NOME, COGNOME, MATRICOLA DELLO STUDENTE:

Esercizio 1. Sia G il gruppo simmetrico su 4 oggetti.

- (a) Quanti e quali sono i sottogruppi non ciclici di ordine 4 in G ?
- (b) Quanti e quali sono i sottogruppi di ordine 5 in G ?
- (c) Quanti e quali sono i sottogruppi di ordine 6 in G ?
- (d) Sia $A = \langle (1234), (13) \rangle$. A è abeliano? Qual è l'ordine di A ? $\langle (12) \rangle$ è normale in A ? $\langle (1234) \rangle$ è normale in A ?

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 56. Provare che G non è semplice.

Esercizio 3. Sia E l'anello quoziente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$.

- (a) Si dica se il gruppo moltiplicativo di E è ciclico; in caso affermativo, se ne indichi un generatore.
- (b) Si dica quante radici hanno in E i polinomi $x^3 - 1$, $x^4 - 1$, $x^{31} - 1$ e $x^7 - 1$.
- (c) Si dica se il polinomio $x^2 + x + 1$ è irriducibile in $E[x]$.