Cognome..............................Nome............................
matricola...............................
Docente.................................

ALGEBRA 2
20 gennaio 2010

1. Sia G un gruppo, N un suo sottogruppo normale tale che $\frac{G}{N}$ sia ciclico. Allora G è prodotto di N per un sottogruppo ciclico K.

2. Sia p un primo e sia R il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ costituito dalle frazioni che ridotte ai minimi termini hanno denominatore non divisibile per p. Provare che:

i) R è un sottoanello di $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

ii) $I = \left\{\frac{r}{s} \in R \quad | \quad p \,|\, r\right\}$ è un ideale di R.

iii) Ogni elemento di $R - I$ è unitario.

iv) I è un ideale massimale.

3. Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ delle classi di resti mod 5 e siano $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$ due polinomi di $\mathbb{Z}_5[x]$.

Si considerino gli ideali I e J da essi generati.

a) $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{I}$ e $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{J}$ sono isomorfi come anelli? Giustificare la risposta.

b) Per ciascuno degli anelli $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{I}$ e $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{J}$ determinare tutti gli ideali.