ALGEBRA 2
20 gennaio 2011

Cognome ....Nome................................

Matricola..............................Docente................................

1. Sia G un gruppo prodotto diretto di due suoi sottogruppi ciclici $A =< a >$ e $B =< b >$ entrambi dello stesso ordine. Siano $C =< ab >$ e $D =< a^{-1}b >$.

Si provi che:
i) $| C |=| D |=| A |=| B |$
ii) $G = C \times D$ se e solo se $| C |$ è dispari.

2. Sia p un numero primo con $p \equiv 1(mod.6)$ e sia $\varphi : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$, ove $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$, l'applicazione definita ponendo:

$$\varphi([x]_p) = [x]_p^3, \forall [x]_p \in \mathbb{Z}_p^*$$

a) Si provi che φ è un endomorfismo di $\mathbb{Z}_p^*$ e si determinino $\ker \varphi$ e $Im\varphi$.

b) Sulla base dei risultati raggiunti al punto precedente si trovi quanti sono i polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$ della forma $x^3 - h$, con $h \in \mathbb{Z}_p$

3. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello con unità 1_A,in cui il gruppo additivo $(A, +)$ è ciclico. Si provi che:

α) A ha caratteristica n se e solo se $| A |= n$

β) A coincide con il suo sottoanello fondamentale.