Cognome.. Nome..
matricola..
Docente...

ALGEBRA 2
9 febbraio 2010

1. Sia $\mathbb{Z}_2\,[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti sul campo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resti modulo 2. Si considerino in $\mathbb{Z}_2[x]$ i seguenti polinomi:

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^3 - x + 1$$

e siano $I = < f(x) >$ e $J = < g(x) >$.

Si provi che $K_1 = \dfrac{\mathbb{Z}_2[x]}{I}$ è un campo finito di ordine 4, mentre $K_2 = \dfrac{\mathbb{Z}_2[x]}{J}$ è un campo finito di ordine 8.

K_1 è a meno di isomorfismi un sottocampo di K_2?

2. Siano $G_1 = V$ il gruppo trirettangolo e $G_2 = S_3$ il gruppo simmetrico su 3 oggetti. Si consideri il prodotto diretto $G = G_1 \times G_2$ e si definisca in G la relazione $\mathcal{R}$ che ad ogni coppia (x, y) con $x \in G_1$ e $y \in G_2$ associa l'elemento $(a, b)^{-1}(x, y)(a, b)$ al variare di $(a, b) \in G$.

1) Si provi che $\mathcal{R}$ è di equivalenza e se ne determinino le classi di equivalenza.

2) Si costruisca il centro $Z(G)$ e si mostri che il gruppo quoziente $\dfrac{G}{Z(G)}$ è isomorfo a S_3.

3. Sia $\mathbb{Z}_5$ il campo delle classi di resti mod 5 e sia A l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{bmatrix} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}_5$$

rispetto all'ordinaria somma di matrici e al prodotto righe per colonne (non si chiede la verifica che A è anello!!)

Provare quanto segue:

a. gli elementi non unitari di A costituiscono un ideale I di A;

b. I è principale ed è l'unico ideale proprio di A;

c. l'anello quoziente $\dfrac{A}{I}$ è un campo isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.