ALGEBRA 2
9 febbraio 2011

Cognome ....**Nome**................................

Matricola..............................**Docente**................................

1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Si provi che sono tra loro equivalenti le seguenti affermazioni:

i) G è ciclico di ordine primo o infinito
ii) ogni sottogruppo non ridotto all'unità di G è isomorfo a G

2. Nell'anello $\mathbb{Z}_p[x\ ]$ dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resti modulo p (primo) si considerino

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \text{ e l'ideale } I[x] =< f(x) > \text{ generato da } f(x)$$

Trovare l'ordine dell'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_p[x]}{I[x]}$, mostrare che non è un campo. Determinare i divisori dello zero e provare che essi insieme allo zero formano un ideale di A se e solo se $p = 2$.

3. Sia K un campo finito di ordine p^t, $p \neq 2$.Si mostri che esiste un $y \in K$ tale che $y^2 = -1$(1 è l'unità di K) se e solo se $p^t \equiv 1(mod\, 4)$