Nome.....................................Cognome............................
sei matricola?

Algebra 2
14 giugno 2010

1. Dato un gruppo G si denoti con $Aut(G)$ il gruppo degli automorfismi di G. Provare che se $Aut(G) = \{I\}$ allora vale la seguente condizione:

(α**)** G è un gruppo abeliano in cui ogni elemento non identico ha periodo esattamente 2.

Mostrare che esistono gruppi abeliani non ridotti all'unità che soddisfano la condizione (α) per i quali $Aut(G)$ è ridotto all'identità e gruppi abeliani non ridotti all'unità che soddisfano la condizione (α) per i quali $Aut(G)$ non è ridotto all'identità.

2. Si determinino i valori $a \in \mathbb{Z}_3$ per cui l'anello

$$F_a = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{< ax^3 + x^2 + 1 >}$$

è un campo.

Se a è un tale valore si studino i gruppi $(F_a, +)$ e $(F_a - \{0\}, \cdot)$ determinandone in particolare l'ordine e i periodi degli elementi.

3. Siano m ed n interi > 1 fissati.

a. Si provi che un'applicazione

$$g : (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$$

è un omomorfismo di anelli se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) esiste $k \in \{0, ..., m-1\}$ tale che $g([x]_n) = [kx]_m, \forall [x]_n \in \mathbb{Z}_n$.
ii) m divide kn
iii) m divide $k^2 - k$.

b. Si determini l'unico omomorfismo non banale $g : (\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$