ALGEBRA 2 (primo anno)
8 Luglio 2010

Cognome ....Nome................................

Matricola...............................Docente................................

1. Si provi che un gruppo G di ordine pq (p, q numeri primi uguali o distinti) è abeliano se e solo se il centro non è ridotto alla sola unità. Si mostri con un esempio che un gruppo generico può avere il centro non ridotto alla sola unità senza essere abeliano.

2. Sia $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e si consideri l'anello $(A, +, \cdot)$ ove le operazioni di somma e prodotto sono così definite:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - 8bd, ad + bc + 2bd)$$

provare che:

i. ($A, +, \circ$) è commutativo, dotato di unità e se ne determini la caratteristica.

ii. Posto $\varphi : \mathbb{Q} \to A$ l'applicazione definita ponendo $\varphi(a) = (a, 0) \forall a \in \mathbb{Q}$: si provi che φ è un monomorfismo di anelli e si dica se $\varphi(\mathbb{Q})$ è un ideale di A o no motivandone la risposta.

3. Sia G un gruppo non abeliano di ordine 12. Provare che

a. L'ordine di $Z(G)$ è al più 2.

b. Se $Z(G)$ è banale, allora G è isomorfo ad A_4 (il gruppo alterno su 4 lettere).

.