Nome.......................................Cognome.............................
sei matricola?

Algebra 2
16 settembre 2010

1. Dato un gruppo G si consideri l'insieme T delle applicazioni bijettive t di G tali che

$$t(ab^{-1}c) = t(a)[t(b)]^{-1}t(c), \forall a, b, c \in G$$

Si provi quanto segue:
i) T è un gruppo rispetto all'ordinario prodotto di applicazioni
ii) T contiene $Aut(G)$,ovvero il gruppo degli automorfismi di G, e il cayleyano destro K di G . Inoltre K è normale in T.
iii) $K \cap Aut(G) = \{I_G\}$
iv) $T = KAut(G)$ (provare ad esempio che $\forall t \in T$ l'applicazione $\alpha : G \mapsto G$ definita ponendo $\alpha(g) = t(g)[t(u)]^{-1} \forall g \in G$ è un automorfismo di G...)

2. Si consideri in $\mathbb{Z}^2$ il sottomodulo M generato da

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

a) Si trovi una base di M e se ne determini il rango
b) Si dica quanti elementi contiene $\dfrac{\mathbb{Z}^2}{M}$.

3. Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resti modulo p.

a) Si determinino i valori di p primo per i quali esistono polinomi $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ tali che sia identicamente soddisfatta la relazione

$$(x^2 + x + 5)f(x) + (x^2 + 6x)g(x) = 1$$

b) Sia $p = 5$ e sia $I[x] =< x^2 + 6x >$ e si consideri l'anello quoziente $A = \dfrac{\mathbb{Z}_p[x]}{I[x]}$. Si provi che A ha ordine 25, non è un campo e se ne determinino i divisori dello zero.