Cognome................................Nome.............................
matricola................................
Docente..................................

ALGEBRA 2
11 novembre 2010

1. Sia $\mathbb{Z}_7$ l'insieme delle classi di resti mod.7 e $\mathbb{Z}_7^* = \{\mathbb{Z}_7 - \{0\}\}$ e sia $G = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7^*$ cioè $G = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, b \neq 0\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alle seguente legge

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a + bc, bd)$$

a) Qual è l'ordine di G? Determinare gli elementi di periodo 2 e 3.

b) Verificare che posto $N = \{(a,1) \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$, N è un sottogruppo normale di G. Qual è l'ordine di N ?

c) Determinare l'ordine del gruppo quoziente e dire se è isomorfo ad un gruppo ciclico oppure no.

2. Si consideri l'anello $(A, +, \cdot)$ con

$$A = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$
$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac + bd, ad + bc)$$

α) Si determinino l'unità gli elementi unitari e i divisori dello zero.

β) Si determinino tutti gli ideali di A. Esistono due suoi ideali propri di cui A è somma diretta ?

3. Sia K un campo di caratteristica 5. Si provi che il sottocorpo minimo di K è l'insieme degli elementi di K che sono radici del polinomio

$$p(x) = x^5 - x \in K[x].$$