Algebra 2 - Compitino 3/5/2011

Nome e Cognome: Matricola:

Rispondere su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1 Sia G un gruppo con 8 elementi non ciclico.

1.1 Dimostrare che se $g \neq 1$ allora $o(g) \in \{2, 4\}$.

1.2 Sia $o(g) = 2$ per ogni $g \in G$. Dimostrare che $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (Aiuto: siano $a, b \neq 1$, $a \neq b$ in G e $c \notin < a, b >$. Considerare i sottogruppi $< a, b >$ e $< c >$...)

1.3 Supponiamo che esista un elemento $g \in G$ tale che $o(g) = 4$ e sia $h \notin < g >$. Dimostrare che $G =< g > \cup h < g >$ (unione disgiunta).

1.4 Assumendo 1.3, dimostrare che se $gh = hg$ allora $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

1.5 Assumendo 1.3, dimostrare che $h^{-1}gh \in < g >$.

1.6 Assumendo 1.3 e $gh \neq hg$, dimostrare che $h^{-1}gh = g^{-1}$.

2 Sia $\mathbb{Z}_5$ il gruppo additivo delle classi di resti modulo 5. Si dica se le seguenti leggi definiscono un'applicazione di $\mathbb{Z}_5$ in $\mathbb{Z}_{10}$. In caso affermativo, dire se sono omomorfismi di gruppi, e se sono iniettivi o no.

2.1 $f_1 : [x]_5 \mapsto [x]_{10}$.

2.2 $f_1 : [x]_5 \mapsto [2x]_{10}$.

3 Sia $G = \mathbb{Z}_{12}$, il gruppo delle classi dei resti modulo 12 rispetto alla somma.

3.1 Elencare i sottogruppi di G indicando per ciascuno un generatore.

3.2 I sottogruppi sono normali?

3.3 Elencare tutti gli automorfismi di G.

4 Siano $A =< \alpha >$ e $B =< \beta, \gamma >$ dove α, β, γ sono le permutazioni:

$$\alpha = (1234) \qquad \beta = (567) \qquad \gamma = (56)$$

4.1 Si determinino i periodi di α, β e γ.

4.2 Si scrivano tutte le potenze distinte di α, β e γ.

4.3 Qual è l'ordine di B? B è ciclico? A quale gruppo è isomorfo?

4.4 Si provi che $< \beta >$ è un sottogruppo normale di B.

4.5 Si mostri che il prodotto AB è un gruppo. Di che ordine?

5 Sia $G = GL(2, \mathbb{Z}_3)$, il gruppo delle matrici quadrate non singolari di ordine 2 sul campo $\mathbb{Z}_3$ delle classi dei resti modulo 3 rispetto all'usuale prodotto righe per colonne e si consideri il sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \quad ac \neq 0 \right\}.$$

5.1 Si provi che H è un sottogruppo di G.

5.2 H è normale in G? Qual è il suo ordine?

5.3 Costruire $Z(H)$, il centro di H.

5.4 Provare che $H/Z(H)$ è isomorfo ad S_3.

5.5 Determinare il gruppo degli automorfismi interni di H.

6 Sia $G = (\mathbb{Z}_{37}^*, \cdot)$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili nel campo $\mathbb{Z}_{37}$.

6.1 Si provi che il periodo di $x = 3$ è 18.

6.2 Si calcoli il periodo di $y = 6$.

6.3 Siano x e y come sopra, si costruisca un generatore di G.