Algebra 2 - Compitino 2 14/6/2011 - fila A

Nome e Cognome: Matricola:

Rispondere su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A.1 Sia G un gruppo di ordine $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$.

A.1.1 Quanti possono essere i sottogruppi di ordine $3, 5$ e 11?

A.1.2 Dimostrare che K, 11-sottogruppo di Sylow, è normale.

A.1.3 Dare una decomposizione primaria di G/K.

A.2 Nell'anello dei polinomi $A = \mathbb{Z}_5[x]$ sia $f(x) = x^3 + x + 1$.

A.2.1 Il polinomio $f(x)$ è irriducibile in A?

A.2.2 Dire se l'ideale $I = (x^3 + x + 1)$ è massimale o no.

A.2.3 Il quoziente A/I è un campo? Se sì, di che ordine?

A.3 Stabilire se esistono valori interi di k per cui risultino isomorfi i seguenti gruppi

$$H_1 = \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_{20}, \qquad H_2 = \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{10}$$

A.4 Si consideri l'endomorfismo φ dello spazio vettoriale $V = (\mathbb{Z}_7)^2$ definito da

$$\varphi(a, b) = (2a + 6b, a + 4b)$$

e sia A la matrice corrispondente rispetto alle basi canoniche.

A.4.1 Usando operazioni elementari, si determini una matrice diagonale equivalente a $xI_2 - A$.

A.4.2 Si determini la forma canonica razionale di φ e una base relativa.

A.4.3 Si determini, se esiste, la forma canonica di Jordan di φ e una base relativa.

A.4.4 Si dica se, tramite φ, V è uno $\mathbb{Z}_7[x]$-modulo indecomponibile.

A.5 Classi laterali di un gruppo. Gruppo quoziente. Teorema di Lagrange.

A.6 Ideali primi e massimali: definizioni e criteri per il riconoscimento. Esistono anelli con ideali massimali non primi?

Algebra 2 - Compitino 2 14/6/2011 - fila B

Nome e Cognome: Matricola:

Rispondere su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

B.1 Sia G un gruppo di ordine $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$.

B.1.1 Quanti sono i possibili sottogruppi di Sylow di G?

B.1.2 Dimostrare che K, 13-sottogruppo di Sylow, è normale.

B.1.3 Dare una decomposizione primaria ciclica di G/K.

B.2 Nell'anello dei polinomi $A = \mathbb{Z}_3[x]$ sia $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

B.2.1 Il polinomio $f(x)$ è irriducibile in A?

B.2.2 Dire se l'ideale $I = (x^3 + 2x + 1)$ è massimale o no.

B.2.3 Il quoziente A/I è un campo? Se sì, di che ordine?

B.3 Stabilire se esistono valori interi di k per cui risultino isomorfi i seguenti gruppi

$$H_1 = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{45}, \qquad H_2 = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_{15}$$

B.4 Si consideri il gruppo abeliano G definito dalla presentazione

$$G = \langle a, b | 2a + 4b = 4a + 20b = 6a + 18b = 0 \rangle$$

e sia A la matrice corrispondente alla mappa $f : \mathbb{Z}^2 \to G$ definita da $f(1,0) = a$ e $f(0,1) = b$.

B.4.1 Usando operazioni elementari, si determini una matrice diagonale partendo dalla matrice A.

B.4.2 Si trovi una decomposizione di G in gruppi ciclici.

B.4.3 Si trovi l'ordine di G.

B.4.4 Si calcolino i periodi di a e b.

B.5 Il problema dell'inversione del teorema di Lagrange.

B.6 Definizione di A-modulo, A-modulo libero, A-modulo ciclico. Teorema di struttura di un A-modulo finitamente generato su PID.