ALGEBRA 2 e II
17 novembre 2011

Cognome **...................................Nome................................**

Matricola...............................Docente................................

1. Nel gruppo simmetrico S_6 si considerino gli elementi $\alpha = (1346), \beta = (1346)(25)$.

a. Si precisi il periodo di α,e di β e si determini l'ordine e gli elementi del gruppo $G =< \alpha, \beta >$

b. Si scrivano tutte le decomposizioni non banali in prodotto diretto di G e si descrivano i gruppi quoziente $\frac{G}{H}$ e $\frac{G}{K}$, ove $H =< \alpha^3\beta >$ e $K =< \alpha^2 >$.

c. Considerato il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_8^*$degli elementi unitari dell'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ si costruisca un'applicazione $\phi : G \to \mathbb{Z}_8^*$ che sia un epimorfismo di nucleo K.

2. Si consideri A l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$: si verifichi che è anello non commutativo dotato di unità e si consideri l'omomorfismo di anelli $\pi : \mathbb{Z} \to A$ definito da $n \mapsto n \cdot 1_A$. Si determinino la cardinalità di A, la caratteristica (cioè il generatore positivo di $Ker(\pi)$) e il sottoanello fondamentale (cioè l'immagine di π).

3. Sia p un numero primo. Provare che l'insieme

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in p\mathbb{Z} \right\}$$

è un ideale bilatero massimale dell'anello $Mat_2(\mathbb{Z})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$, ma l'anello quoziente $\frac{Mat_2(\mathbb{Z})}{I}$ non è un corpo.

4. Per ogni a intero, definiamo un gruppo abeliano G_a dato dalla presenzazione

$$G_a = \left\langle x, y \quad | \quad (-2a^2 - a)x + (2a^2 + 2a)y = (-a^2 - a)x + (a^2 + a)y = 0 \right\rangle .$$

i. Dire per quali interi a il gruppo G_a è ciclico.

ii. Nel caso sia cicliclo, determinare un generatore g in funzione di x e y.